1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ４ 月 ２４ 日現在

機関番号： １１３０１
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2010～2014
課題番号： ２２５４０１６７
研究課題名（和文） 正則自己同型群の研究とその複素解析学への応用

研究課題名（英文） Study of holomorphic automorphism groups and its application to complex analysis

研究代表者
清水　悟（Shimizu, Satoru）

東北大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：９０１７８９７１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究においては、複素多様体をその正則自己同型群により特徴付けるという問題の研究を通じて、第１種ジーゲル領域についての興味深い結果を得た。具体的には、正則自己同型群を保つ第１種ジーゲル領域の間の微分同型写像の形を決定し、その応用を与えた。また非有界ラインハルト領域の研究について大きな進展をみた。とくに長年の懸案であった、ある種の基本的な類の非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題へ肯定的な解答を与えることができた。

研究成果の概要（英文）：In the present research, through the study of the problem of characterizing complex manifolds by their holomorphic automorphism groups, we obtained an interesting result on Siegel domains of the first kind. To be concrete, we determined the form of diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups, and gave its applications. Also, the study of unbounded Reinhardt domains has made much progress. In particular, we could give an affirmative answer to the holomorphic equivalence problem for a certain fundamental class of unbounded Reinhardt domains, which is a long-pending problem.

研究分野： 多変数複素解析学

キーワード： 関数論　正則自己同型群　ラインハルト領域　チューブ領域　複素幾何学　正則同値問題　リー群　正則ベクトル場

１．研究開始当初の背景

(1) 研究代表者は従来からリー群の理論を用いた多変数複素解析学、複素幾何学の研究を行っている。今回の研究課題「正則自己同型群の研究とその複素解析学への応用」は、その一環として、研究代表者がこれまでに採択された科学研究費研究課題「複素多様体の上への群作用の研究」、「特殊領域の研究」、「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」、「特殊領域の研究とその複素幾何学への応用」と次のように関連している。

(2) 「複素多様体の上への群作用の研究」においては、特にトーラス作用の研究に集中した。その結果、長年懸案の問題であった非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の解決に、部分的ではあるが本質的な進展を見た。そしてこの解決結果より非有界なラインハルト領域の上へのトーラス作用の標準化についての基本的な結果を得た。これらの結果を基にして、非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的解決およびトーラス作用の共役性の複素幾何学への応用の準備を整えることができた。非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題の一般的解決は、「特殊領域の研究」、「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」、「特殊領域の研究とその複素幾何学への応用」、そして今回の「正則自己同型群の研究とその複素解析学への応用」を通じての主要なテーマの一つとなっている。またトーラス作用の共役性の複素幾何学への応用は、研究分担者の児玉教授との上記「特殊領域の研究」における研究連絡の際に着想を得た課題で、研究課題「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」における複素ユークリッド空間Ｅと穴あき複素平面の直積空間Ｔとの直積空間Ｅ×Ｔの特徴付けの問題、そして今回の研究課題における有界対称領域の特徴付けの問題に繋がるものである。

(3) 「特殊領域の研究」においては、特にチューブ領域の研究に進展を見ている。とりわけチューブ領域上の完備多項式ベクトル場の延長に関する結果をある程度確立した意義は大きい。このことより、これまで手が付かなかった多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域の一般的研究が可能になり、そのための有用な方法も開発できた。今回の研究課題においても重点的にチューブ領域の研究を取り上げるのは、そのようなことを踏まえて、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域に関する正則同値問題の解決等が強く期待できるからであり、また完備多項式ベクトル場の延長に関する結果の完成が望まれるからである。

(4) 「多変数複素解析学における正則同値問題と関連諸問題へのリー群論的アプローチ」においては、Ｅ×Ｔをその正則自己同型群により特徴付ける問題を解決した。そしてその過程において、ラインハルト領域の理論を複素幾何学へ応用する手法を開発し、同時にリーマンの写像定理の高次元化についての着想を得た。これらは上記「特殊領域の研究とその複素幾何学への応用」、今回の研究課題「正則自己同型群の研究とその複素解析学への応用」の大きな動機付けとなっている。

(5) 「特殊領域の研究とその複素幾何学への応用」においては、球の直積のその正則自己同型群による特徴付けに関する研究を行い、新たな結果を得ると同時に既知の結果を発展させた。またこの研究に関連して、対称領域をその正則自己同型群によって特徴付ける一つの結果を得た。これらの研究結果は、リーマンの写像定理の高次元化に関連する今回の研究課題の主要問題について、肯定的な解答の証左を与えるものとなっている。

２．研究の目的

(1) 複素多様体の正則自己同型群の研究は、複素多様体の上への群作用の研究と相まって数学の広範な分野と関連がある。例えば、複素多様体の上へのリー群の作用の研究は、微分幾何学における変換群の理論や表現論はもとより、ヒルベルトの第５問題から派生する正則的な不変式論に密接な関連をもつ。また整数論、代数幾何学における保型関数の研究、代数多様体のモジュライの研究等において必要不可欠であるエルミート対称空間と呼ばれる複素等質空間やそこに作用する不連続群などの考察も、より一般な複素等質空間の正則自己同型を考察することにより深い理解が得られる。他方、複素多様体の正則同値性の研究は複素多様体の正則自己同型群の研究と表裏一体であると同時に、それ自体、複素多様体の一意化問題等、複素解析学における中心的な問題である。本研究ではこれらの立場を踏まえて、正則自己同型群の研究を行い、その複素解析学への応用を試みる。

(2) 正則自己同型群の研究：一般に複素多様体に関する正則同値問題、つまり「２つの複素多様体が双正則同値になるのはどういうときか」ということを調べる問題において、双正則不変量、あるいは双正則不変なものに着目するということは定石の一つであろう。そして双正則不変なもので素朴かつ代表的なものとして正則自己同型群がある。実際、２つの複素多様体が双正則同値であるならば、それらの正則自己同型群は位相群として同型でなければならない。それでは上記事実の逆は成り立つのであろうかという自然な疑問としてつぎの問題を考える。

問題１　X と Y を（同次元の）２つの複素多様体とする。もしそれらの正則自己同型群が位相群として同型であるならば、X と Y は双正則同値になるか？
ここで一方の複素多様体 X は大きな正則自己同型群をもつ必要がある。例えば X として、有界対称領域 D、とくに複素ユークリッド空間内の単位球やそれらの直積、複素ユークリッド空間自身 E、穴あき複素平面のいくつかの直積 T、または一般に D と E と T の直積であるもの Z などが考えられる。そこで問題１に数学的妥当性による付加的条件も加味した次の問題を考える。
問題２　問題１において、X = Z であり、Y が連結なスタイン多様体であるならば、X と Y は双正則同値になるか？
この問題は、X = D のときは、リーマンの写像定理の高次元化と関連し、X が E と T の直積 W であるときは、複素力学系におけるある種の領域の特徴付けと関連する、幅広い内容を含むものである。本研究の主要な目的の一つは問題２の解決を試みることである。問題２の解決はその過程においても様々な意義がある。例えば X = Z の場合の解決の試みは、ラインハルト領域の理論を発展させる。とくに非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題、等質なラインハルト領域の特徴付けの問題と深く関わっており、これらの問題に取り組む必要がある。また、W の次元が 2 以上のとき、W の正則自己同型群 G 自身は無限次元であるが、その部分群で有限次元であるもの、すなわち G の部分群で有限次元リー群の構造をもつものは、問題２の研究において非常に重要な役割を果たす。この見地から、次のような問題を調べることも、応用上の重要性からというだけではなく、G の構造を解明する試みの一環として興味ある課題と思われる。
問題３　W の次元が 2 以上のとき、G の位相部分群 H で有限次元リー群の構造をもつものを分類、決定せよ。

(3) 完備正則ベクトル場の研究：複素多様体 X の正則自己同型群の研究は、X の無限小正則自己同型、つまり X 上の完備正則ベクトル場の研究と親密な関係をもつ。本研究の特色の一つは、以下に述べる課題を通じた、この完備正則ベクトル場についての考察である。複素平面内の単位円板 B は上半平面としての実現、すなわちチューブ領域としての側面ももつ。そして B の一つの自然な一般化である対称領域は、重要な類として、チューブ領域としての実現をもつものを数多く含んでいる。この観点から、X = D がチューブ型の対称領域の場合において問題２を調べることは、対称領域のその正則自己同型群による特徴付けを与えることとして興味ある課題である。そしてチューブ型の対称領域の特徴付けの問題は、チューブ領域としての実現の剛性、すなわちチューブ領域に関する正則同値問題と密接な関連がある。研究代表者による一般的な結果(小林昭七教授還暦記念論文集、World Scientific、1994)により、チューブ領域の正則自己同型や同値生の研究においては、無限小正則自己同型環が完備多項式ベクトル場からなるようなチューブ領域が重要な研究対象になる。この種のチューブ領域を多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域と呼ぶ。本研究では、多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域の正則自己同型や同値性を調べることを通じて、ある種の完備正則ベクトル場についての考察を行う。とくに多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域の同値性の研究、すなわちそのようなチューブ領域に関する正則同値問題を解く試みは、正則自己同型群の研究の複素解析学へ応用例として大きな意義をもつ。

３．研究の方法
(1) 正則自己同型群の研究とラインハルト領域の研究については、研究の目的に述べた問題２を、X = D で、D が球の直積として与えられた場合に解決することから始める。これまでに、直積の因子に現れる球の次元がすべて 2 以上の場合、また直積の因子に現れる球の次元がすべて 1 の場合に解決をみている。これらの場合に対する方法を発展させる、あるいは新たな方法を開発することにより、直積の因子に現れる球の次元が任意の場合に、問題２の成立を確かめる。この研究活動においては、研究分担者の児玉教授との密接な研究連絡を必要とする。また、このような立場からの、問題２に関連した未解決問題は数多くあると予想され、それらを集めて問題集を作成することは、これからの研究の方向性を定める上で有意義であろう。研究連絡、研究集会などを通じてこのことにも努める。
(2) (1)の研究の一環として、非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題については、数学的妥当性および技術的な観点から、対象を擬凸な非有界ラインハルト領域でその対数像が直線を含むようなものに絞る。そのような領域 D が座標超平面を含まない場合には、研究代表者により正則同値問題へ肯定的解答が与えられている。この結果を基にして D が原点を含む場合に正則同値問題へ解答を与えることを試みる。また研究の目的に述べた問題３を、H が標準的トーラスを含む場合に調べる。
(3) チューブ領域に対しては、先ずその上の完備多項式ベクトル場の延長についての研究に取り組む。また、一般に複素有界領域に関する正則同値問題への、リー群論における共役性定理を利用してのアプローチにおいては、対象となる複素有界領域の正則自己同型群の、ある種の可解なリー部分群に着目することが多い。多項式型無限小正則自己同型環をもつチューブ領域 T を対象とするときも、

先ずどのような共役性定理を利用するかを見定め、そしてT上の完備な正則ベクトル場のなすリー環gの可解なリー部分環で然るべき性質をもつものに着目することになる。このような考察において一つの典型的な場合であると同時に基本的な意義をもつ、g 自身が可解な場合の考察から取り組む。その際の主な研究方法としては、チューブ領域のもつ代数的構造を明瞭にするという形での座標変換の利用、g の等方部分環の随伴表現に関する固有空間分解、そして完備多項式ベクトル場の″完備性″の直接的利用などがある。また可解なリー群、リー環に関する幾何学的な理論である、微分幾何学における solvmanifold の理論の検討も研究方法についての大きな参考になろう。

(4) 当計画の正則自己同型群の研究の複素幾何学に関連する部分について、問題集の作成も含め研究分担者の児玉教授に研究協力をお願いする。この協力を得ながら、研究代表者を中心に研究組織内において随時セミナー等を開いて、当計画の研究目的を達成するための着想を募り、関連する各自の成果を発表、討論したりする。そして派生する様々な問題に関する図書の整備や、各地の研究会への出席、およびそこにおいて資料収集や討論などを行う。さらに可能ならば本研究に関連ある専門家を交えた研究集会を開催し、研究成果の討論と情報交換を行う。

４．研究成果

(1) 複素多様体をその正則自己同型群により特徴付ける問題の研究に関連して、「２つのｎ次元等質有界領域ＤとＥが、リー群として同型である正則自己同型群をもつならば、ＤとＥは双正則同値になるか？」という問題の研究を行った。2009 年度に得た、n次元連結複素多様体Ｍに対して、その正則自己同型群がｎ次元対称領域Ｄの正則自己同型群と同型な位相部分群Ｇをもち、Ｇの等方部分群がすべてコンパクトであるならば、Ｍ 自身が Ｄと双正則同値になるという結果を用いて、ＤとＥが対称領域の場合は上記問題に肯定的解答を得る。そこでＤとＥが一般の等質有界領域の場合に取り組んだ。そしてＤとＥが等質な第１種ジーゲル領域の場合に、上記問題をより単純な問題へと還元することに成功した。具体的には、先ず、第１種ジーゲル領域ＤとＥの間に、ＤとＥのそれぞれの正則自己同型群の作用に関して同変な微分同型写像 Ｆがあったとき、リー群論における共役性定理、第１種ジーゲル領域の実平行移動の群の特徴付け等を用いて、Ｆの虚部Ｈが実部変数に無関係であることを示した。そして、Ｄ と Ｅのそれぞれ上の完備正則ベクトル場のなすリー環が有する階別リー環構造を用いて、Ｈが、Ｄの底として与えられる凸錐体Ｖから Ｅの底として与えられる凸錐体Ｗの上への微分同型写像であって、ＶとＷのそれぞれの線形自己同型群の作用に関して同変なものを誘導するという結果を得た。これらのことより、上記問題を第１種ジーゲル領域の場合に解くためには、「２つのｎ次元等質凸錐体ＶとＷが、リー群として同型である線形自己同型群をもつならば、ＶとＷは線形同値になるか？」という問題を解決すればよいということを導いた。

(2) (1)の研究に関連して、「２つのｎ次元複素多様体ＭとＮに対して、それらの間の微分同型写像Ｆ があって、ＭとＮの正則自己同型群がＦにより共役であるとする。このときＦはどういう形のものか？」という問題の研究を行った。そして 2010 年度に行った第１種ジーゲル領域の研究を発展させ、ＭとＮが第１種ジーゲル領域の場合に、Ｆ の形を決定することに成功した。具体的には、第１種ジーゲル領域ＤとＥの間に、ＤとＥのそれぞれの正則自己同型群の作用に関して同変な微分同型写像Ｆがあったとき、ＦはＥの正則自己同型と、ＤからＥの上へのある特別な形の微分同型写像Ｇとの合成として与えられることを示した。ここでＧの虚部は実部変数に無関係であり、Ｄ の底として与えられる凸錐体 ＶからＥの底として与えられる凸錐体Ｗの上への微分同型写像であって、ＶとＷのそれぞれの線形自己同型群の作用に関して同変である。またＧの実部は実部変数のアフィン変換であって、その線形部分は実定数行列であり、その平行移動部分は虚部変数の関数である。

(3) 複素多様体をその正則自己同型群により特徴付けるという問題から派生した、「ＤとＥをｎ次元の等質第１種ジーゲル領域とするとき、もしＤの正則自己同型群とＥの正則自己同型群がリー群として同型であるならば、ＤとＥは双正則同値になるか？」という問題に関連した 2010 年度からの研究を整理、拡充し、雑誌論文（Kodai Math. J.に掲載）として発表した。その中で、特に、ｎが３以下の場合には、上記問題が正しいということを示した。また、名古屋大学の伊師英之氏から教示頂いた、j-リー環と呼ばれるものの共役性に関する結果を用いて、上述の論文とはまったく別の立場から、Ｄ､Ｅが一般の等質第１種ジーゲル領域の場合に上記問題が正しいということが分かった。

(4) 非有界なラインハルト領域に関する正則同値問題について基本的な結果を得た。具体的には、与えられたラインハルト領域が擬凸ですべての座標超平面の和集合 Ｈ を含み、その対数像が直線を含む場合を考察した。そしてそのような領域ＤとＥの間の双正則写像は必ずＨをＨにうつすことを示した。またこの結果の応用として、上記の条件を満たすラインハルト領域に対して、正則同値問題へ肯定的な解答を与えることが出来た。

(5) 非有界ラインハルト領域の正則同値問題、正則自己同型の研究の一環として、等質なラインハルト領域に関する研究を行った。ラインハルト領域Dの研究においては、その正則自己同型群Gを調べることが基本的な重要性をもつ。D が有界なときは、G の構造は既に明らかにされている。しかし、一般の場合、すなわちDが必ずしも有界とは限らない場合については、G の構造について分かっていることは少ない。例えば、D の構造を調べることに関連して、等質なラインハルト領域を決定するという基本的問題、つまり「ラインハルト領域D上にその正則自己同型群が推移的に作用するとき、D はどのようなものであるか？」という問題がある。これについて、D が有界なとき、つぎの結果が知られている：Dを有界ラインハルト領域とするとき、Dが等質ならば、D は球の直積と代数的に同値になる。他方、一般的な場合については、「(必ずしも有界とは限らない) 等質な擬凸ラインハルト領域Dは、その直積因子として、いくつかの (必ずしも同次元とは限らない) 単位球、いくつかの複素平面、そしていくつかの、原点を除いた複素平面というものをもつ直積ラインハルト領域に代数的に同値であるか？」という予想がある。上に述べた結果は、この予想が、D が有界なときに正しいことを意味する。しかしDが非有界な場合は未解決であった。この研究では、そのような場合への部分的解答を与えた。具体的にはつぎの結果を示した：D を座標超平面と交わらない擬凸なラインハルト領域とする。このときDが等質ならば、D は原点を除いた複素平面の直積と一致する。

(6) 非有界ラインハルト領域の正則同値問題，正則自己同型の研究の一環として、リュービル葉層構造と呼ばれるものの研究を行った。リュービル葉層構造は、一般の複素多様体Mに対して定まり、M の双正則不変量を与えるという点で重要である。この研究においては、M が 3 次元のラインハルト領域で座標超平面を含まず、M の対数像に含まれる極大アフィン部分空間 L の次元が 1 の場合に、M のリュービル葉層構造について調べた。具体的には、直線Lの方向ベクトルの成分により、M のリュービル葉層構造を、有理型、半有理型、無理型の 3 種類に分類し、有理型、半有理型の場合に、リュービル葉層構造の様子を明らかにした。

(7) (6)の研究に関連して、Mがラインハルト領域で座標超平面を含まず、M の対数像に含まれる極大アフィン部分空間の次元が正の場合に、M 上のリュービル葉層構造について考察した。そしてM上のリュービル葉層構造を決定するための基本的な原理を明らかにした。

(8) 複素ユークリッド空間内の、境界が滑らかであるとは限らない一般複素楕円体の正則自己同型に関する研究を行った。そのような複素有界領域の正則自己同型を完全に決定することは未解決の問題とされていたが、リー理論を用いて完全な決定を行った。

(9) 複素ユークリッド空間内の、境界が滑らかであるとは限らない一般ハルトーグス三角形の正則自己同型に関する研究を行った。そのような複素有界領域の正則自己同型を完全に決定することは未解決の問題とされていたが、リー理論を用いて完全な決定を行った。また問題解決の過程において一般ハルトーグス三角形の正則自己同型と一般複素楕円体の正則自己同型との関連を明らかにした。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① 清水悟、Holomorphic equivalence problem for Reinhardt domains and the conjugacy of torus actions、Tohoku Math. J. (掲載確定)、査読有
② 児玉秋雄、On the holomorphic automorphism group of a generalized Hartogs triangle、Tohoku Math. J. (掲載確定)、査読有
③ 清水悟、木村光一、Homogeneous Reinhardt domains containing no coordinate hyperplanes、Kodai Math. J.、37 巻、2014 年、235 頁-245 頁、査読有
④ 児玉秋雄、On the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid、Complex Var. Elliptic Equ.、59 巻、2014 年、1342 頁-1349 頁、査読有
DOI: 10.1080/17476933.2013.845177
⑤ 清水悟、Prolongation of holomorphic vector fields on a tube domain、Tohoku Math. J.、65 巻、2013 年、495 頁-514 頁、査読有
⑥ 清水悟、児玉秋雄、Diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups and applications、Kodai Math. J.、36 巻、2013 年、299 頁-312 頁、査読有
⑦ 清水悟、児玉秋雄、Jisoo Byun、A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and punctured planes、Tohoku Math. J.、62 巻、2010 年、485 頁-507 頁、査読有
⑧ 清水悟、児玉秋雄、Addendum to our characterization of the unit polydisc、Kodai Math. J.、33 巻、2010 年、182 頁-191 頁、査読有

〔学会発表〕（計８件）

① 児玉秋雄、On the holomorphic automorphism group of a generalized Hartogs triangle and a related question、日本数学会年会、2015 年 3 月 24 日、明治大学
② 清水悟、原点を含むある種の非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題、多変数関数論冬セミナー、2014 年 12 月 21 日、金沢大学サテライト・プラザ
③ 清水悟、原点を含むある種の非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題、日本数学会秋季総合分科会、2014 年 9 月 25 日、広島大学
④ 清水悟、多変数複素解析における特殊領域、日本数学会年会（企画特別講演）、2014 年 3 月 15 日、学習院大学
⑤ 児玉秋雄、On the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid、日本数学会秋季総合分科会、2013 年 9 月 27 日、愛媛大学
⑥ 清水悟、児玉秋雄、Diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups and applications、多変数関数論冬セミナー、2012 年 12 月 22 日、東北大学
⑦ 清水悟、児玉秋雄、Diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups and applications、日本数学会秋季総合分科会、2012 年 9 月 19 日、九州大学
⑧ 清水悟、児玉秋雄、A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and punctured planes、日本数学会秋季総合分科会、2010 年 9 月 23 日、名古屋大学

６．研究組織

(1)研究代表者
清水　悟（SHIMIZU SATORU）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：９０１７８９７１

(2)研究分担者
児玉　秋雄（KODAMA AKIO）
金沢大学・理工研究域数物科学系・教授
研究者番号：２０１１１３２０