

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 26 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540173

研究課題名(和文) 超函数の積分変換と無限階微分作用素の研究

研究課題名(英文) Study of integral transformations in hyperfunctions and differential operators of infinite order

研究代表者

岡田 靖則 (Okada, Yasunori)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60224028

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：超函数における核定理に関しては、局所凸空間への拡張の途上の結果を得た。また無限階作用素によるパラメータ付き割り算や、そのBMTクラスに関連する変形を確立し、積分変換の台の性質、特異台の性質を得た。無限遠点で有界な超函数については、積分変換に当たる概念を無限遅れの作用素に対する十分条件の形で与え、境界値表示、双対性や周期方程式に関連する成果を上げた。
成果の一部は雑誌論文の形で発表し、また一部は投稿中である。

研究成果の概要(英文)：On kernel theorems in hyperfunctions, we got some partial results for the purpose of the study on locally convex cases. We established the division by differential operators of infinite order with parameters and its variant related to BMT classes, and got the support properties and the analytic singular support properties for integral transformations. We also worked on bounded hyperfunctions at infinity, and gave a notion of fading memory for operators with infinite delay. Moreover we got results on boundary value representations, dualities, and periodic equations.

研究分野：代数解析

キーワード：超函数 無限階微分作用素

1. 研究開始当初の背景

線形偏微分方程式の佐藤超函数解や分布解の研究においては種々の積分変換が登場するが、分布の空間における積分変換では、連続性の概念が重要な役割を果たす。実際、例えば試験函数の空間から分布の空間への線形写像については、分布を核とする積分変換は連続性で特徴付けられた (Schwartz の核定理)。

一方、超函数は正則函数の境界値として構成され、コンパクトでない定義域上の超函数全体の空間には有益な位相は入らないと考えられている。超函数に対する「よい写像」とは、一般に正則函数への作用から関手的に構成される射とされ、特別な場合を除き、核定理の類似物は存在しなかった。

代表者はポローニャ大学の Liess 氏との共同研究 (2. 引用文献) において、連続性に代わるものとして半連続性という概念を提唱し、ユークリッド空間で、コンパクト台の超函数の空間や実解析函数の空間から超函数の空間への半連続写像が、それぞれ適切な条件を満たす核函数を用いた積分変換の形に一意的に表されることを示した (核定理の超函数版)。これにより、積分変換こそがよい線形写像と考えれば、よい線形写像とは半連続線形写像であるといえる。また、やはり Liess 氏との共同研究 (2. 引用文献) において、超分布における核定理と超局所特異性との関係を調べ、Beuling 型と Roumieu 型での結果の違い、超函数の場合との比較から、超函数における半連続性は Roumieu 型超分布における連続性と類似の特徴付けをもつことを示した。

さらに (2. 引用文献) において、1 変数超函数の無限遠点での有界性という概念を導入し、周期常微分方程式の有界解と周期解に関する古典的な結果の、超函数の枠組みにおける類似物を構成し、さらにベクトル値版を導入することで、ある変数に関し周期的な偏微分方程式、函数方程式へ応用した。

2. 研究の目的

本研究では、超函数の核定理を一般化すること、無限階微分作用素での割り算による平滑化を用いて積分変換の写像としての性質と核函数の性質との関係を調べること、及び線形偏微分方程式の種々の問題の適切性の議論へ応用することを目的とし、また理論の有界型の超函数への適用やその応用も目指すものであった。

(1) まず、超函数の核定理の一般化については、応募者は (2. 引用文献) においても Liess 氏と共同で核定理に関連する研究を行ってきたし、先行する研究 Bastin-Laubin (2. 引用文献), Kaneko (2. 引用文献), Schneiders (2. 引用

文献) も超函数論的視点などからの興味を引くが、これらによって半連続性が使いやすい道具になったとは言にくい。本研究では、半連続写像が真に貼り合わせが可能であることを示すことで、核定理を一般の実解析的多様体上の場合へ拡張し、さらに超函数全体の空間以外の場合への一般化を試みた。

(2) 積分変換の台の性質、特異台の性質、滑らかさの性質を調べるために、核函数の一部の変数に関する楕円型無限階微分作用素での割り算による平滑化の適用範囲を広げることを考えた。ここで、例えば台の性質とは、積分変換による像の台が常にコンパクトならば核函数の台が第 2 標準射影に関して固有的となることをいい、他の性質も同様に定義される。

(3) (2. 引用文献) で導入した無限遠点で有界な超函数も、大域切断の空間以外には位相的な取り扱いができないが、半連続性ならば導入できるのではないかと考えた。これにより、周期的方程式の有界解、周期解の構成を議論することを考えた。

引用文献

F. Bastin and P. Laubin, A general functional characterization of the microlocal singularities, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 2, (1995), pp.155--164.

A. Kaneko, A topological characterization of hyperfunctions with real analytic parameters, Sci. Pap. Coll. Arts Sci., Univ. Tokyo, 38-1, (1988), pp.1--6.

O. Liess and Y. Okada, On the kernel theorem in hyperfunctions, 数理解析研究所講義録, 1397, (2004), pp.159--171.

O. Liess and Y. Okada, Remarks on the kernel theorems in hyperfunctions, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B5, (2008), pp.199--208.

O. Liess and Y. Okada, The kernel theorem in ultradistributions: Microlocal regularity of the kernel, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino, 67-2, (2009), pp.179--201.

Y. Okada, Massera criterion for linear functional equations in a framework of hyperfunctions, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 15, (2008), pp.15--51.

J.P. Schneiders, A Schwartz kernel theorem for analytic functions, Bull.Soc.

3. 研究の方法

(1) 超函数における核定理に関しては、曲がった楔からの境界値表示等も考慮に入れることで、半連続性の概念を実解析多様体上に拡張するとともに、超函数全体の空間以外の場合への拡張をいくつかのケース毎に場合分けして取り組んだ。ここでは、内外の超函数、核定理、境界値問題の専門家と研究連絡を行い意見を求めるとともに、具体例の計算も進めた。

(2) 積分変換の台の性質や特異台の性質、滑らかさの性質を調べるため、ユークリッド空間での定数係数無限階微分作用素による超函数の平滑化のいくつかのケースへの拡張に取り組んだ。ここでは、無限階の微分作用素や擬微分作用素の表象理論の専門家と連絡を取り、無限階作用素による割り算に関する助言を求めた。

(3) 無限遠点で有界な超函数の空間の性質を調べ、その空間における半連続性の概念を導入することで、ある変数に関して周期的な偏微分方程式の周期解と有界解との関連を調べた。ここでは、常微分方程式の大域理論や函数微分方程式の専門家と連絡を取り、周期解に関する助言を求めた。

超函数、核定理、微分方程式、表象理論に造詣の深い、イタリア・ボローニャ大学の Otto Liess 氏に研究協力者となってもらい、本研究全般に渡り情報を交換したり意見を求めた。また、全般にわたって関連する書籍、論文を参考にした。

4. 研究成果

(1) 超函数における核定理に関しては、多様体への拡張では半連続性の概念の拡張が大きな問題になると考えていたが、核定理の結論そのものが半連続性の拡張に役立ち、超函数の局所性の既存の理論を応用できることがわかってきた。そこでは積分変換の核に関する一連の一意性定理が重要な役割を果たす。これらの一意性定理は、5. [雑誌論文] に、整理した形で発表することができた。

また、核定理の局所凸空間への拡張は途上であるが、局所凸値正則性の双対性等に関する結果も得つつあり (5. [雑誌論文])、この内容は下記 (3) とも大いに関連する。

(2) 積分変換の台の性質や特異台の性質、滑らかさの性質に関連して、超函数と可微分性に付随するパラメータの付いた無限階作用素による割り算を確立し、台の性質を得て、論文の形で発表することができた (5. [雑誌論文])。

さらに、BMT クラスと呼ばれる、準解析的クラスを含む超可微分クラスについて調べ、 L_0 クラスとの比較や共通部分定理などを示した (5. [雑誌論文])。この研究を応用して、BMT クラスに関連する無限階作用素による割り算を確立し、特異台の性質を示すことに成功した。これは論文の形にまとめ投稿中である。

(3) 無限遠点で有界な超函数とその上での半連続性に関しては、半連続性の概念の導入には至らなかったが、積分変換に当たる概念を無限遅れの作用素に対する十分条件の形で与える他、ベクトル値版の境界値表示や双対性、反射的局所凸の場合の周期方程式の周期解の存在に関連した研究などを含め、当初想定していた以上に進めることができた。

これらの結果の一部は論文の形で発表することができた (5. [雑誌論文])。また、双対性に関連する部分は論文の形にまとめ投稿中であるが、さらなる研究で上記 (1) の核定理の局所凸空間への拡張への応用も期待できるものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

Otto Liess and Yasunori Okada,
Ultra-differentiable classes and intersection theorems, *Mathematische Nachrichten*, 査読有, 287, (2014), pp.638--665,
doi: 10.1002/mana.201200248

Yasunori Okada,
Boundary value representations for bounded hyperfunctions and some variants, *数理解析研究所講究録*, 査読無, 1861, (2013), pp.1--10.

Yasunori Okada,
Massera type theorems in hyperfunctions with reflexive Banach values, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, B40, (2013), pp.1--14.

Yasunori Okada,
A notion of boundedness for hyperfunctions and Massera type theorems, *Banach Center Publications*, 査読有, 97, (2012), pp.101--111,
doi: 10.4064/bc97-0-7

Otto Liess and Yasunori Okada,
Support properties for integral operators in hyperfunctions, *Advances in Mathematics*, 査読有, 231, (2012),

pp.1439--1461,
doi: 10.1016/j.aim.2012.07.002

Yasunori Okada,
有界超関数と周期線形関数方程式について,
数理解析研究所講究録, 査読無, 1723,
(2011), pp.179--190.

〔学会発表〕(計14件)

Yasunori Okada,
Solvability of coupling equations and
infinite dimensional holomorphy, 超局所
解析の諸相, 2014年10月21日, 京都大学数
理解析研究所(京都)

Yasunori Okada,
Bounded hyperfunctions and Massera type
theorems, International Conference on
Generalized Functions,
2014年9月9日, サウサンプトン(英国)

Yasunori Okada,
Coupling equations and infinite
dimensional holomorphy, Formal and
Analytic Solutions of Functional
Equations, 2014年9月3日, バヤドリッド
(スペイン)

Yasunori Okada,
Coupling 方程式における無限変数正則関数
について, 代数解析学と局所凸空間, 2014年
2月17日, 日本大学理工学部駿河台校舎(東
京)

Yasunori Okada,
非古典的な第2超関数の例とフーリエ逆変換,
アクセサリー・パラメーター研究会, 2013年
9月17日, 東京大学玉原国際セミナーハウス
(玉原)

Yasunori Okada,
Massera type theorems in vector-valued
analytic functions and hyperfunctions,
FASDE III, 2013年8月27日, ベドレボ(ポ
ーランド)

Yasunori Okada,
Massera type theorems in hyperfunctions
with values in a reflexive locally convex
space, The Asian Mathematical Conference
2013, 2013年7月2日, Busan(韓国)

Yasunori Okada,
A functional approach to bounded
hyperfunctions, Recent development of
theory of analytic functionals and related
topics, 2013年3月7日, 北海道大学理学部
(北海道)

Yasunori Okada,
Bounded hyperfunctions and Massera type
theorems, 偏微分方程式姫路研究集会, 2013
年2月22日, 姫路モノリス(姫路)

Yasunori Okada,
Boundary value representations for
bounded hyperfunctions and some variants,
超局所解析と漸近解析の最近の進展, 2012年
10月23日, 京都大学数理解析研究所(京都)

Yasunori Okada,
Massera type theorems in hyperfunctions
with reflexive Banach values, 漸近解析に
於ける超局所解析の展望, 2011年11月15日,
京都大学数理解析研究所(京都)

Yasunori Okada,
A notion of boundedness for hyperfunctions
and Massera type theorems, FASDE II, 2011
年8月11日, ベドレボ(ポーランド)

Yasunori Okada,
Massera type theorems for linear
functional equations with infinite delay
in hyperfunctions, Equadiff 2011, 2011年
8月5日, ラフバラ(英国)

Yasunori Okada,
Massera type theorems in hyperfunctions,
NEW DIRECTIONS IN ANALYSIS, 2010年8月
10日, ハノイ(ベトナム)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡田 靖則 (OKADA, Yasunori)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60224028

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

石村 隆一 (ISHIMURA, Ryuichi)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10127970

(4) 研究協力者

LISS, Otto
ポローニャ大学・教授