

科学研究費補助金研究成果報告書

平成25年 6月3日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤C

研究期間：2010～2012

課題番号：22540174

研究課題名（和文）吸収壁を持つ拡散過程の拡散作用素の滑らかさの精密評価の研究とその応用

研究課題名（英文）The Research on precise estimate for the regularity of diffusion Operator of diffusion process with absorbed boundary condition and Its application

研究代表者

楠岡 成雄（KUSUOKA Shigeo）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：00114463

研究成果の概要（和文）：

ノックアウトデリバティブの価格計算において現れる、吸収壁（ディリクレ境界条件）を持つ拡散過程に関して、その拡散方程式の解の性質及び数値計算法について研究を行った。まず、拡散半群作用素の滑らかさの精密評価について研究を行い、境界条件のない場合の評価とほぼ同じような評価を得た。さらに、期待値の近似値を精度良く高速に計算する方法を研究し、境界条件のない場合のKLVN法の類似の方法について考察し、3次近似までの公式を得た。公式においてはWhittaker関数が現れるため、プログラムの実装が難しく数値実験は出来ていない。

研究成果の概要（英文）：

We studied the property and numerical computation methods for solutions of diffusion equation related to diffusion processes with absorbed boundary (Dirichlet boundary) which appears in pricing knock-out derivatives. First, we studied about precise estimates of smoothness for diffusion operators with Dirichlet boundary condition, and obtained similar estimates to estimates in the case of diffusion operators without boundary conditions. Then we studied numerical computation methods for the expectation of diffusion process with an absorbed boundary. We studied a similar method to KLVN method in the case of no boundary conditions, and obtained 3rd order approximation formula. Unfortunately Whittaker function appears in the formula, the implementation is difficult, and so we could not do the computer simulation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：確率解析 関数解析

1. 研究開始当初の背景

吸収壁（ディリクレ境界条件）を持つ拡散過程に関して、期待値の近似値を精度良く高速に計算する方法は状態空間の次元が高い時はあまり良いものがなかった。境界条件がない場合には、研究代表者は新たな数値計算法を既に提唱しており、その基礎となったのは、マリアバン解析に基づく拡散半群作用素の滑らかさの精密評価であった。

2. 研究の目的

今回の研究の第1の目的は、ディリクレ境界条件を持つ拡散過程の拡散作用素に関して滑らかさの精密評価を与えること、及びそれに基づく期待値の近似値を精度良く高速に計算する方法を与えることにあった。

3. 研究の方法

マリアバン解析及びリー環の計算、特殊なウィナー汎関数の計算、KLVN法 の類似を計算することが方法であった。

4. 研究成果

(1) 境界条件を持たない場合に拡散過程の期待値の数値計算法であるガウス積分に基づく KLMV 法の収束に関する収束の速さに関する予想の厳密な証明を与えた。

これは二宮-Victour や二宮-二宮が提唱している近似計算手法が、支払い関数がまったく滑らかさを持たない場合でも、収束の速さが同じであることを証明し、その残差項についても計算式を与え、収束の速さがそれ以上はよくはならないことを示した。また、残差項を調べることにより、

ロンバーグ補外法を適用すれば収束の速さが向上することも証明した。

(2) 3つ以上の企業が関与する信用リスクを考慮したファイナンスの動的連続時間モデルに対して、いわゆるコンピュータモデルは場合によっては矛盾をはらむことを示した。

信用リスクモデルにおいては倒産時間の分布に対して既知のコンピュータ関数を用いるコンピュータモデルがよく用いられているが、連続時間モデルを考え、3つ以上の倒産時刻の条件付き分布がコンピュータ関数で与えられるモデルにおいては、時間整合性に問題があり、グンベルコンピュータのモデル及び逆グンベルコンピュータのモデルについては、コックス形の条件付き確率モデルを考える限りにおいては、時間整合性が成立しないことを証明した。その証明に当たっては、大規模な行列の階数の計算を計算機を用いて行っている。最も重要なガウスコンピュータについては、計算精度の問題から証明しきれないが、やはり時間整合性はないように思われる。（これは野村證券の中島武信氏との共同研究である。）

(3) UFG 条件を満たす拡散過程の拡散作用素の精密評価に関して、そのパラメータに依存しない一様評価、及び評価の局所化について、ほぼ満足を得る結果を証明した。局所化が出来たことにより、拡散過程に対する大域的な UFG 条件は必要がなくなり、例えば、係数が解析的な確率微分方程式から得られる拡散過程の拡散作用素に対しては、局所的には常に精密評価が与えられ。

(4) ディリクレ境界条件を持つ拡散過程の拡散作用素に関して滑らかさの精密評価。

非特異なディリクレ境界条件を持つ拡散過程について、その拡散作用素の滑らかさに関する精密評価を、まず境界に平行な方向に対して得た。証明においては、(3)で述べた一様評価と問題に即した新しいノルムを導入して実補間法の手法を用いた。

一方、この平行な方向の評価と実解析的な手法を用いて境界と垂直な方向に対しても精密評価を得ることが出来た。この結果、を与えることはほぼ完成した。数値計算法については3次近似までしか進まなかった。非特異なディリクレ境界条件を持つ拡散過程の拡散作用素に対する精密評価はほぼ完成した。

(5) 非特異なディリクレ境界条件を持つ拡散過程の期待値の数値計算法の開発研究を行った。

これについては二宮-Victour 法の類似の計算手法について開発研究を行った。この手法においては、まず確率微分方程式の確率テラー展開を計算することが重要となる。その際、現れる逐次ウィナー積分の積の期待値が重要となるが、境界条件のない場合は奇数次の逐次ウィナー積分それ自身の期待値はすべて0となるために、式が極めて単純となるが、境界条件のある場合は期待値が0とはならないため、その計算がまず必要となる。

結果として、期待値は境界からの関数となり、3次近似の段階で Whitaker 関数などの特殊関数が現れることがわかり、これらの特殊関数を精度良く計算するプログラムが必要となることがわかった。現在も漸近展開の係数について計算中であるが、4次以後の係数はよくわからない。(これらは

二宮祥一東工大教授、二宮真理子氏らとの共同研究である。)

(6) また、無限粒子系、あるいは波動場の中にある粒子の、ノイズを含まない力学系からの極限過程として拡散過程を導出した(ブラウン運動の導出問題)。これまでは弾性衝突などの特別な相互作用の場合にのみこの問題が解かれていたが、今回は滑らかなポテンシャルを持つ相互作用の場合に、一部カットオフが入っているが、この問題を厳密な証明に基づいて解くことに成功した(これは梁松筑波大学准教授との共同研究である)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

① Kusuoka Shigeo, Gaussian K-Scheme::Justification for KLVN method, to appear in Advances in Mathematical Economics ed. S.Kusuoka, M.Maruyama vol.17 (2013) 査読有

② Kusuoka Shigeo, A Remark on Malliavin calculus: Uniform Estimate and Localization, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 19(2012), 533-558. 査読有

③ Kusuoka Shigeo, and Liang Song, Classical mechanical model of Brownian motion with one particle coupled to a random wave field, Stoch. Anal. Appl. 30 (2012), no. 3, 493-528. 査読有

④ Kusuoka Shigeo, and Nakashima Takanobu, A remark on credit risk models and copula, Advances in Mathematical Economics ed. S.Kusuoka, M.Maruyama vol. 16 (2012), 53-84. 査読有

- ⑤. Kusuoka Shigeo, A certain Limit of Iterated CTE, Advances in Mathematical Economics ed. S.Kusuoka, M.Maruyama vol. 13 (2010), 99-111. 査読有
- ⑥ Fushiya Hirotaka and Kusuoka Shigeo, Uniform Estimate for distributions of the sum of i.i.d. random variables with fat tail, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 17 (2010), 79-121. 査読有
- ⑦ Kuwada Kazumasa, Kusuoka Shigeo and Tamura Yozo, Large Deviation for stochastic line integrals as L_p current, Prob. Theory Related Fields 147 (2010), 649-674. 査読有
- ⑧ Kusuoka Shigeo and Liang Song, A calassical mechanical model of Brownian motion with plural particles, Reviews in Math. Physics 22 (2010), 733-838

[学会発表] (計4件)

- ① A remark on credit risk models and copula, CREST and 4th Ritsumeikan-Frence Workshop on Risk, Simulation and related Topics, 立命館大学 APU(別府), 2012年3月 招待講演
- ② Numerical Computation for the Expectation on Diffusion Processes, ICIAM 2011, Vancouver, 2011年7月 招待講演
- ③ Approximation of Expectation of Diffusion Processes, Analysis, Stochastics, Applications, ウィーン大学, 2010年7月 招待講演
- ④ Approximation of Expectation of Diffusion Processes with Dirichlet Boundary Conditions, International Workshop on Mathematical Finance: Topics on Leading-edge Numerical Procedures and Models, 東京工業大学, 2010年2月 招待講演

[図書] (計0件)

[産業財産権]
○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

楠岡 成雄 (KUSUOKA Shigeo)

研究者番号 : 00114463

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :