

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月20日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540176

研究課題名（和文） 退化双曲型方程式に対する振動問題の研究

研究課題名（英文） Research on oscillation problems for degenerate hyperbolic equations

## 研究代表者

石田 晴久（ISHIDA HARUHISA）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号：80312792

研究成果の概要（和文）：2階半線形退化双曲型方程式に対する境界値問題の解の振動性について、振動解となる十分条件を与えた。特に境界条件としてディリクレ条件およびロバン条件の場合を考察した。また、具体例のトリコミ型方程式の正值解の存在条件を調べた。更に、伝播速度が時間に依存する退化波動方程式の解のエネルギー評価を一般の超可微分関数族において考察し、特に係数の滑らかさの特性を抽出できる条件と随伴関数との相互関係を見出した。同時に係数の振動性も考慮し、その振幅と係数の退化性と滑らかさの最適な関係を解明した。

研究成果の概要（英文）：We have obtained sufficient conditions to be oscillating for the solutions of the boundary value problems for semilinear degenerate hyperbolic equations of second order. Especially, their problems under Dirichlet and Robin conditions were examined. We have also studied some existence condition of the positive solution to Tricomi type equation. Moreover, we have established the energy estimates of the solutions to degenerate wave equations with time dependent propagation speeds in ultradifferentiable classes, and found an optimal relation among the smoothness, degeneration and oscillation of their coefficients.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：退化双曲型方程式，振動理論，初期値問題，境界値問題，エネルギー評価

## 1. 研究開始当初の背景

微分方程式の振動問題とはその解の振動性質、正值性や係数の振動性が反映される解の性質を考察するものである。線形常微分方程式の振動問題については解の零点の分布を示す19世紀のSturmの定理を端緒とし、

Swanson (1968)やKreith (1973)の著書に豊富な研究結果の解説があり、今日までに非常に発展している。楕円型偏微分方程式や放物型偏微分方程式の振動問題についても1980年代頃までに多くの研究結果が得られており、十分に整備されている。これらはN. Yoshida (2008)の著書に詳しく紹介されてい

る。しかし、双曲型偏微分方程式の振動問題については現在でも余り進んでおらず、多くの研究がなされていない状況にある。その1つの原因は楕円型方程式や放物型方程式に対する比較原理のような良い性質が双曲型方程式では一般に成立しないためである。

双曲型方程式の振動問題に関する研究の発端は Kreith (Proc. AMS 22 (1969)) に遡ることができる。彼はそこで空間1次元における波動方程式の初期境界値問題を考察し、常微分方程式の Sturm の定理を時空間変数係数の0階項を有する1次元波動方程式に拡張した。また、0階項が時間変数係数の場合に解を変数分離法で構成し、対応する空間1変数に関する常微分方程式の固有値問題に解の振動問題を帰着させた。その後、この研究を継承した、C. Kahane (Proc. AMS 41 (1973)) は空間多次元において空間変数係数の線形双曲型方程式に対する境界値問題の振動解の存在を示した。それまでの双曲型方程式の振動問題の研究では楕円型境界値問題の正值な第1固有関数が利用されてきたが、そこではもっとも弱い正值な劣固有関数を構成することで解の振動性を示している。この手法は大変意義深い。何故なら、退化楕円型境界値問題では一般に正值な固有関数が存在しないからである。但し、彼の構成法そのものは退化双曲型方程式の振動問題には直接適用できないが、0階項などに正值性条件を付加することで構成法を適切に修正すれば同様な正值の劣固有関数の構成が期待される。

## 2. 研究の目的

(1) 研究代表者らが既に得た初期値問題での振動定理 (J. Math. Anal. Appl. 356 (2009)) に対応する境界値問題に対する振動定理の確立を目指す。特に境界条件がディリクレ条件やロバン条件の場合を考察する。

(2) (1) で予想される振動定理の条件に非斉次な線形常微分不等式の正值解の非存在性が現れるので、関連する非斉次な線形常微分方程式系の解の漸近挙動を調べる。

(3) 初期値問題で非振動解を与える初期値の条件を探求する。これは空間1次元で既に得た研究代表者らによる正值解の存在定理 (J. Math. Anal. Appl. 356 (2009)) を再考し、空間多次元の場合に拡張しようとする試みである。特に解の表現公式があるトリコミ型方程式の正值解の存在条件を調べる。

## 3. 研究の方法

(1) 初期値問題における振動定理に対応する境界値問題に対する振動定理を得るために解に適切な荷重関数を掛けたものを空間変

数で積分した量を考えることになる。この手法自体は古典的によく知られている変分法や一般化されたグリーンの公式に基づくものであるが、その際に解に掛ける荷重関数の構成が問題になる。初期値問題での振動定理では Cazenave-Haraux (J. Funct. Anal. 76 (1988)) で導入された補助関数を適宜修正したものが有効であった。一方、境界値問題では Kahane (1973) の観点から、対応する退化楕円型境界値問題の正值な劣固有関数が目的の荷重関数として相応しいことがわかるので、これを如何に構成するかである。その劣固有関数を球対称解として構成しようとするか或る種の2階線形常微分方程式に対する初期値問題になる。ここで重要なのは退化性を考慮に入れた適切な初期条件の設定で、それは0階項などに正值性条件を仮定すること、及びそれを活用した巧妙なパラメータの導入によりなされる。

(2) 関連する非斉次な線形常微分方程式系の解の漸近挙動を調べるには係数行列の Lozinski ノルムと解の Lyapunov 数を用いる。これらは共に係数行列の固有値の実部の最大値を量る尺度なので解の指数関数的増大度を評価するものである。斉次な線形常微分方程式系の解の Lyapunov 数に関しては既に豊富な研究結果が知られており、Adrianova (1995) の著書にその多くが紹介されている。これらの手法を参考にする。

(3) 波動方程式の初期値問題において、空間1次元では特殊な初期条件の下で Kreith (1969) が正值解の存在を示し、空間3次元以下でも Cafarelli-Friedman (Trans. AMS 297 (1986)) が解の古典的な表現公式を変形して正值解を保証する初期値の条件を与えている。そこで、この考察を元に、初期値問題の解の表現公式が確立している退化双曲型方程式について、その正值解が存在するための初期値の条件を追究する。特にトリコミ型方程式では波動方程式と同様に一般空間次元で解の表現公式が得られているのでモデルケースとしたい。また、連携研究者らによる近年の一連の研究から、解の爆発条件より或る特別な初期条件で球対称解の正值性が導かれているので、この手法を適宜修正してトリコミ型方程式に応用することも考えられる。

## 4. 研究成果

(1) 時空間変数の2階半線形退化双曲型方程式に対する境界値問題の解の振動性について、振動解となるための十分条件を与えた。特に境界条件として、斉次ディリクレ条件、非斉次ディリクレ条件、ロバン条件の場合を考察し、得られた諸定理の仮定に現れる、非斉次線形常微分不等式の正值解の非存在条

件を具体的に検証した。

(2) (1)の非斉次線形常微分不等式に関連して、Lozinski ノルムや Lyapunov 数などの特性数を用いて変数係数の非斉次線形常微分方程式系の解の漸近挙動を調べた。特に非斉次線形系に対する Wazewski 型不等式を考案し、新規の評価を幾つか得た。また、高次の特性数の概念を導入し、有界係数の非斉次線形系の解が多項式位数になるための条件を見出した。

(3) 2階線形の有限次退化双曲型方程式であるトリコミ型方程式の正值解の存在条件を考察した。特に空間1次元の場合にトリコミ型方程式の解の表現公式を利用して解の正值性を直接調べた。その結果、波動方程式に対応する結果とは異なり、変数係数の双曲型方程式では解の表現公式を直接用いても満足すべき成果は得られなかった。また、解の正值性に方程式の退化性は本質的に影響しないことが判明した。

(4) 解の振動性とは別に、退化双曲型方程式の係数が振動する場合に解の評価への影響を考察した。特に1点で退化する2階双曲型方程式のモデルとして、伝播速度が時間に依存する退化波動方程式に対する初期値問題の解のエネルギー評価を超可微分関数族で行なった。超可微分関数族は解析関数、準解析関数(一致の定理が成立する無限回微分可能関数)、Gevrey級関数などを含む、それらの自然な一般化である。特に係数の滑らかさの特性を抽出できる条件と超可微分関数族の随伴関数との相互関係を発見した。同時に係数の振動性も考慮に入れ、係数の振幅の大きさ、退化性、滑らかさの関係を明らかにした。そして、それぞれの特性が反映されるよう相空間を無限個に適切に分割し、特に高周波の領域で新たに改善された対角化の手法を導入して解の自然なエネルギー評価を確立した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

① Haruhisa Ishida, Fumihiko Hirose, On second order weakly hyperbolic equations and the ultradifferentiable classes, *Journal of Differential Equations*, 査読有, 掲載決定済み

② Fumihiko Hirose, Takuhiro Inooka, Trieu Duong Pham, On the global solvability for semilinear wave equations with smooth time dependent propagation speeds, *Springer Proceedings in*

*Mathematics and Statistics*, 査読有, Vol. 44, 掲載決定済み

③ Christiane Boehme, Fumihiko Hirose, Generalized energy conservation for Klein-Gordon type equations, *Osaka Journal of Mathematics*, 査読有, Vol. 49, No.2, 2012, 297-323  
DOI: 10.1007/s00208-007-0132-0

④ Tamotu Kinoshita, Giovanni Tagliabata, Time regularity of the solutions to second order hyperbolic equations, *Arkiv foer Matematik*, 査読有, Vol. 49, No. 1, 2011, 109-127  
DOI: 10.1007/s11512-009-0120-6

⑤ Fumihiko Hirose, Tang Bao Ngoc Bui, On energy estimates for second order hyperbolic equations with Levi conditions for higher order regularity, *Annali dell'Universita di Ferrara. Sezione VII Scienze Matematiche*, 査読有, Vol. 57, No. 2, 2011, 317-339  
DOI: 10.1007/s11565-011-0121-9

⑥ Haruhisa Ishida, Hyung-Ju Lee, On asymptotic behaviour of solutions to linear differential systems with variable coefficients via characteristic numbers, *Funkcialaj Ekvacioj*, 査読有, Vol. 53, No. 3, 2010, 359-379  
DOI: 10.1619/fesi.53.359

⑦ Tamotu Kinoshita, Generalized Duhamel's principle for some semi-linear hyperbolic type of equations, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 査読有, Vol. 15, No. 3, 2010, 355-370

⑧ Anahit Galstian, Tamotu Kinoshita, Karen Yagdjian, A note on wave equation in Einstein and de Sitter space-time, *Journal of Mathematical Physics*, 査読有, Vol. 51, No. 5, 2010, 052501, 18 pp.  
DOI: 10.1063/1.3387249

⑨ Fumihiko Hirose, On second order weakly hyperbolic equations with oscillating coefficients and regularity loss of the solutions, *Mathematische Nachrichten*, 査読有, Vol. 283, No. 12, 2010, 1771-1794  
DOI: 10.1002/mana.200810013

⑩ Hiroyuki Takamura, Hiroshi Uesaka, Kyouhei Wakasa, Blow-up theorem for semilinear wave equations with non-zero

initial position, Journal of Differential Equations, 査読有, Vol. 249, No. 4, 2010, 914-930  
DOI: 10.1016/j.jde.2010.01.010

[学会発表] (計 10 件)

① Hiroya Ito, Some remarks on generalized Korn's inequalities, Taiwan-Japan Joint Conference on PDE and Analysis, 2012 年 12 月 27 日, 台湾国立大学 (台湾)

② 石田晴久, 可積分でない非斉次項をもつ線形微分方程式系の解の Lyapunov 数について, 第 19 回超局所解析と古典解析, 2012 年 11 月 23 日, かんぼの宿北九州

③ 石田晴久, 非斉次線形微分方程式系の解の Lyapunov 数, 函館偏微分方程式研究集会, 2012 年 10 月 6 日, 公立はこだて未来大学

④ Fumihiko Hirosawa, On the wave equation with variable propagation speed, 20<sup>th</sup> ICFIDCAA, 2012 年 7 月 29 日~8 月 3 日, Hanoi Univ. of Sci. & Tech. (Vietnam)

⑤ Fumihiko Hirosawa, On second order weakly hyperbolic equations and the ultradifferentiable classes, Fourier Analysis and Partial Differential Operators, 2012 年 6 月 25 日~6 月 31 日, Aalto Univ. (Finland)

⑥ 廣澤史彦, On the global solvability for semilinear wave equations with smooth propagation speeds, 4<sup>th</sup> Nagoya Workshop on Differential Equations, 2012 年 3 月 6 日, 名古屋大学

⑦ 石田晴久, Positivity and oscillations for 1-D degenerate hyperbolic PDEs, 仙台偏微分方程式研究集会, 2011 年 10 月 8 日, 東北大学

⑧ 石田晴久, 非斉次線形微分方程式系の解の Lyapunov 数の表現と数値計算について, 第 17 回超局所解析と古典解析, 2010 年 11 月 20 日, かんぼの宿山代

⑨ 廣澤史彦, On the energy estimates of second order hyperbolic equations with time dependent coefficients, 新潟偏微分方程式研究集会, 2010 年 10 月 9 日, 新潟大学

⑩ 木下保, On the hyperbolic equations with time-dependent coefficients, 第 97 回 7 階セ

ミナー, 2010 年 7 月 16 日, 早稲田大学

[図書] (計 1 件)

① 石田晴久, 申正善, 牧野書店, 級数と微分方程式, 2011, 180 pp.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

石田 晴久 (ISHIDA HARUHISA)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授  
研究者番号: 80312792

### (2) 研究分担者

伊東 裕也 (ITO HIROYA)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授  
研究者番号: 30211056  
木下 保 (KINOSHITA TAMOTU)  
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授  
研究者番号: 90301077  
廣澤 史彦 (HIROSAWA FUMIHIKO)  
山口大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 50364732

### (3) 連携研究者

高村 博之 (TAKAMURA HIROYUKI)  
公立はこだて未来大学・システム情報科学部・教授  
研究者番号: 40241781  
上坂 洋司 (UESAKA HIROSHI)  
日本大学・理工学部・元教授  
研究者番号: 30059828