様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月 20 日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０１７７
研究課題名（和文）非線形微分方程式の解の多重性とそのプロフィール

研究課題名（英文）Profile and multiplicity of solutions of nonlinear differential equations

研究代表者
平野　載倫（Hirano, Norimichi）

横浜国立大学・環境情報研究院・教授

研究者番号：８０１３４８１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円、（間接経費）　　810,000円

研究成果の概要（和文）：非線形方程式(系)の解の多重性と定義域の関係の解明（方程式の定義域と,解の個数や解の符号、解のエネルギーとの関係）に取り組み、方程式の定義域の位相的、幾何学的(微分幾何学的)特徴が微分方程式の解の多重性に与える影響を明らかにしてきた(たとえば，定義域(リーマン多様体)が、地域的に異なるRicci曲率をもつときに、方程式が複数の解をもつことなど（領域の微分幾何学的特徴との関係））。N次元ユークリッド空間の穴のあいた領域において,穴の数と解の個数との関係，すなわち穴が多く空いていれば,解もそれに応じて増えるのかといった問題について、Schrodinger方程式を研究し、せいかをあげた。

研究成果の概要（英文）：In this research, I investigated the existence and multiplicity of the solutions of nonlinear elliptic problems defined on domains which have holes, and showed some properties of solutions. On the other hand, we established the existence of solutions of nonlinear Schrodinger equations defined on Reimannian manifolds and showed the relation between the Ricci curvature and the multiplicity of solutions.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：基礎数学

キーワード：解の多重性

１．研究開始当初の背景

非線形シュレインンガー方程式については，Bahri-Coronの1988年の論文(Comm. Pure Appl. Math., vol.41,253-294)がこの分野の発達の端緒をなしており、Benci,V, Cerami,S, やTerracini,Sなどの何人かの研究者がこの問題に挑んでいる．彼らの結果はおおざっぱにいえば、非自明な位相をもつ領域で定義された非線形シュレインンガー方程式は、非自明な解を持つ（複数個）というものである。 本研究にかかわるグループは，この問題の研究において重要な一翼を担っており，またhomology群及びhomotopy群を使うという点で，他の研究者の研究内容と一線を画している．楕円型方程式のシステムの解のプロフィールについては，たとえば、1996年のJ.Weiの論文(J.Differential Equations 129,315-333)が代表的なもので，楕円型方程式のシステムの解のプロフィールを明らかにしている。楕円型の方程式の解のプロフィールに関する最高権威の一人、Pistoia, A(ローマ大学)は、本研究のグループの一員で、これまでも共同研究を行っており、この方向の研究においても我々が国内外の研究の大きな一翼を担っているといえる。遅れのあるシステムについては，J.K.Haleの名著Theory of Functional Differential Equtations”があり，その基本理論はできているのだが，現在生態系や,理論経済学で取り扱われている方程式系を扱うのには，不十分で非自明な周期解などが示せないことが多い．本研究におけるequivalent degree theoryを用いる試みは，我々独自のもので、 すでに本研究協力者のRybicki氏との共同研究でその有用性を示し,本研究で更なる発展を目指している． また、heteroclinicsおよびhomoclinic な解については、P.Rabinowitzがが変分法による研究方法を工夫し（ Ergod. Th. & Dynam. Sys,1994、vol.14,817-829参照)，その後A.Bosetto等によって研究されている．この問題については、国内での研究はほとんど見られない。またこの問題の変分法による扱いはまだ未成熟であり，新しい展開が待たれる．本研究では、上記のequivalent degree theoryをこの問題に持ち込むことでさらなる進展をめざす。

２．研究の目的

本研究の研究目的は、非線形の微分方程式にたいして、その解の多重存在とプロフィールを求めることである。非線形微分方程式を線形の微分方程式と比較したときに、その際立った特徴として、解が存在したとしても一つに定まらないことと、解のプロフィール（幾何学的および解析的特徴）やダイナミクスが直ちには得られないことにある。非線形微分方程式の解の個数については厳密に数え上げることができる場合もあり、個数の下限、上限のみが評価できる場合もある。そして、それらの解は安定な解、不安定な解、エネルギーを最小化する解、高位のエネルギー解、時間的に消滅する解、爆発する解など、さまざまな特徴を有していると考えられる。また、こうした特徴が解の多重性と関連しているとともに、解の幾何学的形状をある程度決定していると思われる。しかし、現在までのところ、こうした解析はまだ、ごく限られた範囲しか行われていない。本研究では、いくつかのタイプの非線形微分方程式に対して、方程式の定義域の特性（幾何学的、および位相的）や、非線形項の形などが解の個数に及ぼす影響を調べ、さらには得られた解のプロフィールおよびダイナミク

スを解析することを目指した。

３．研究の方法

本研究で扱かった問題は、4つのカテゴリーにわけられる。偏微分方程式については、①非線形楕円型境界値問題、②非線形楕円型方程式系の境界値問題、③帯状領域で定義された楕円型方程式の解のダイナミクス。常微分方程式については、④遅れをもつ２階非線形常微分方程式である。より具体的には、

① については、非線形のSchrödinger方程式で空間特異性をもつもの（Hardy項と呼ばれる非線形項を持つ）を中心に扱い、Hénon方程式（星団の形状、ダイナミクスを記述する方程式）についても取り扱かった。

② については、Coupled Schrödinger方程式（光ファイバー内の干渉波を記述する方程式）やGinzburg-Landau方程式（超電導に関する方程式）を扱かった０。

③ については、非線形の楕円型方程式の解で、homoclinic及びheteroclinicと呼ばれる解の存在と多重性を扱かった。

④ については、遅れをもつVan del Pol（自立的振動をする電気回路を記述）方程式および、Lotka Volterra（捕食系を記述する方程式）を中心に扱かった。

４．研究成果

(1) <u>非線形方程式(系)の解の多重性と定義域の関係の解明</u>（方程式の定義域と,解の個数や解の符号、解のエネルギーとの関係）：①および②の方程式の定義域の位相的、幾何学的(微分幾何学的)特徴が微分方程式の解の多重性に与える影響を明らかにした(たとえば, 定義域(リーマン多様体)が、地域的に異なるRicci曲率をもつときに、①および②の方程式が複数の解をもつか（領域の微分幾何学的特徴との関係)、あるいはN次元ユークリッド空間の穴のあいた領域において,穴の数と解の個数との関係, すなわち穴が多く空いていれば,解もそれに応じて増えるのかといった問題(領域の位相的特徴をとの関係)、すなわち、

定義域の位相的、幾何学的(微分幾何学的)性質⇔ 解の個数と性質

という関係を明らかにすることができた。解の個数を数えることは、解の性質を知ることと密接に関係しており、個数の数え上げのプロセスのなかで解の性質（安定性、エネルギーなど）も同時に解明することをできた。

(2) <u>非線形方程式の非線形項による解のプロフィールと特性の解明</u>:①および②の方程式に対して、その非線形項が解のプロフィールと特性に与える影響を解明することを目指した。非線形項の形（たとえば多項式で与えられているとか、対称性があるなど）は、解のプロフィール（解析的、幾何学的特性）に決定的な役割を果たす。たとえば、論文[3]のなかで、シュレジンガー方程式のシステムの解が、正多角形の頂点にあたる場所にそのピークを持つような関数で与えられることが解明された。この結果は、非線形項が３次関数であり、しかも対称性を持つことに依存している。本研究では、解のプロフィールについて、精密な結果を得ることをができた。

特に定義域が非有界な楕円型の方程式は，解の無限遠方での振る舞いと解の個数や、ピークの個数などが密接に関係していると考えられ、この研究目的(２)のなかでも中心的な課題となる。

(3) 非線形微分方程式の解の多重性とカオティックな振る舞いの解明:③および④の方程式に対しては、解の多重性と解のカオティックな振る舞いについて解明することを目指す。③および④の方程式のプロトタイプは倒立振り子の運動方程式である。周期的な外力を与えられた倒立振り子はカオティックなふるまいをすることが知られている。このことと、解が無限個あることは表裏をなしているが、最近になって,これらの現象を変分法によって解析する方法が開発された。本研究では,この方法を発展させ,③及び④の方程式に関して、heteroclinic（相転移を起こす解）な解及び,homoclinic（自己回帰する解）な解の存在と多重性を示すことをができた．これらの解の多重性はカオティックな現象の存在を示すことになる

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　　７件）

[1]Hirano, Norimichi; Rybicki, Sławomir Bifurcations of nonconstant solutions of the Ginzburg-Landau equation. Abstr. Appl. Anal. 2012, 19 pp. 査読有り

[2]Hirano, Norimichi Multiple existence of solutions for a singularly perturbed nonlinear elliptic problem on a Riemannian manifold. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 142 (2012), no. 1, 81–114. 査読有り

[3]Hirano, Norimichi; Shioji, Naoki Existence of two solutions for the Bahri-Coron problem in an annular domain with a thin hole. J. Funct. Anal. 261 (2011), no. 12, 3612–3632. 査読有り

[4]Hirano, Norimichi; Rybicki, Sławomir A remark on global bifurcations of solutions of Ginzburg-Landau equation. Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2011), no. 6, 2943–2946. 査読有り

[5]Hirano, Norimichi; Kim, Wan Se Multiple existence of solutions for a nonhomogeneous elliptic problem on RN. Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 13, 4369–4378. 査読有り

[6]Hirano, Norimichi; Krawcewicz, Wieslaw; Ruan, Haibo Existence of nonstationary periodic solutions for Γ-symmetric Lotka-Volterra type systems. Discrete Contin. Dyn. Syst. 30 (2011), no. 3, 709–735. 査読有り

[7]Amaishi, Toshiro; Hirano, Norimichi Existence of homoclinic solutions for a nonlinear elliptic boundary value

problem. Yokohama Math. J.　56　(2010),
no. 1-2, 9–30. 査読有り

〔学会発表〕（計　０　件）

〔図書〕（計　　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
平野　載倫（　Hirano Norimichi　）

研究者番号：80134815

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：