様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　5 月 20 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４０１７９
研究課題名（和文）　多変数超幾何関数の公式の数式処理による探索

研究課題名（英文）　Research of hypergeometric functions with multi-variables via computer algebra

研究代表者
小原　功任　　　（OHARA　KATSUYOSHI）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：00313635

研究成果の概要（和文）：
本研究では、多変数超幾何関数の局所的性質と数式処理に基づいて公式の導出を行った。多変数超幾何関数の一種である Fisher-Bingham 積分および Fisher 積分に対して、Pfaff 方程式系と呼ばれる一階偏微分方程式系を導出した。さらに方向統計学における最尤推定問題に応用するために、ホロノミック勾配降下法という新しい記号的数値解析アルゴリズムを開発した。それを用いて具体的に最尤推定問題を解いた。さらに研究成果の一環として数学ソフトウェアを作成した。

研究成果の概要（英文）：
In this research, we introduced formulas for some hypergeometric functions with multi-variables using by computer algebra. We found the Pfaffian differential system for the Fisher-Bingham integral and the Fisher integral. In order to apply formulas to Maximum Likelihood Estimation on statistics, we developed new symbolic-numerical method “Holonomic Gradient Descent” and solved concrete MLE problems. Moreover we implemented mathematical software.
.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：複素解析、超幾何関数、数式処理

１．研究開始当初の背景

本研究の目的は、多変数の超幾何関数に対し関数等式、特にパラメータつき変換公式を探索することであるが、その学術的背景として古典的な一変数のガウス超幾何関数を例にとり説明する。

ガウス超幾何関数はパラメータをもつ関数である。１９世紀初頭のガウスにはじまり、

約２００年の研究の歴史がある。ガウス超幾何関数は、隣接関係式、クンマーの変換、ガウスの２次変換、グルサの３次変換、接続関係式など、さまざまな顕著な性質をもつ。その多数の公式(あるいは公式を導出できるという事実)から具体的に計算に使える関数(特殊関数)という性質があり、古典解析や物理学などで幅広く用いられている。また、ガウス超幾何関数のパラメータに特殊な関係を与えたり、特別な極限操作(合流操作) を繰り返すと、直交多項式が現れたり、ベッセル関数など有用な関数が現れたりもする。ガウス超幾何関数の拡張である多変数超幾何関数も具体的な計算に使える関数であり、さまざまな応用がある。例えば、多変数超幾何関数は代数幾何学における周期積分と深い関係があり、多変数超幾何関数で代数方程式の根を表示したり、代数曲線をパラメトライズしたり、尖点のまわりの様子を調べることができる。もしも多変数超幾何関数について関数等式などの基本的な公式がわかれば、個々の代数多様体の性質を調べる強力な道具になる。したがって多変数超幾何関数の性質を調べたり、ガウス超幾何関数と類似した公式を見つけることには価値がある。

ガウス超幾何関数では、２種類の異なる座標変換の結果が一致する現象が起こることがある。すなわち座標変換に対して、関数等式(変換公式)が成り立つ場合がある。変換公式は超幾何関数の大域的性質を表す重要な情報であり、超幾何関数の解析接続の様子を調べる方法のひとつでもある。また有名なガウスの２次変換公式は算術幾何平均・テータ関数・代数幾何学などと結び付いている。ところで超幾何関数の変換公式には、パラメータの対に自由度を含む場合と含まない場合があり、自由度を含む変換公式をパラメータつき変換公式と呼ぶことにする。パラメータつき変換公式は応用範囲が広いため古くから研究されており、一方の座標変換が恒等変換で他方が低次の変換の場合には体系的な研究もあるが(グルサ(1881))、一般の座標変換の場合はほとんど分かっていなかった。ところが最近になって、ガウス超幾何関数に新たなパラメータつき変換公式が発見された(Berndt･Bhargava･Garvan(1995))。この BBG 公式の特別な場合(ラマヌジャン３次変換公式)は、(拡張された)算術幾何平均とも関係がある(Borwein 兄弟(1991))。

2007 年に小池・志賀は 3 項算術幾何平均の研究の副産物としてアペル２変数超幾何関数のパラメータなしの変換公式を発見した。申請者たちはこの結果に触発されて、アペル２変数超幾何関数やロリチェラ３変数超幾何関数のパラメータつき変換公式を見つけた。しかもその公式を特殊化することによって、系として BBG 公式や、ガウス超幾何関数の新しい変換公式が導出されることをも示した(松本・小原(2009))。この事実は、ガウス超幾何関数よりも多変数超幾何関数の変換公式の方が本質的な結果であることを示している。また変換公式の研究は、より一般に多変数超幾何関数と n 項算術幾何平均・代数幾何学・テータ関数論との関係性を明らかにする手がかりにもなる。

２．研究の目的

本研究では、多変数超幾何関数の局所的性質(微分方程式)を利用して、関数等式の一種であるパラメータつき変換公式の組織的探索を行う。関数等式とは２つの見掛けが異なる多変数解析関数の同一性のことである。したがって、ある点での関数値と必要な階数の微分係数(初期値)が一致し、さらに満たすべき微分方程式系も一致すれば、微分方程式の解の一意性から、２つの関数は一致する。多変数超幾何関数は線形偏微分方程式系(多変数超幾何微分方程式系)の解になっているわけであるが、単独方程式と異なり、方程式系の表示には任意性があるし、実際には超幾何微分方程式系を座標変換したものを考えるので、方程式系が一致することをどのように判定するかが一つの問題になる。線形偏微分方程式系の一致判定をするには、ひとつにはグレブナー基底理論を用いて微分作用素環のイデアルメンバーシップ問題に持ち込むという方法が考えられるが、申請者が計算機実験したところでは計算量が大きすぎて計算を遂行できなかった。したがって本研究では多変数超幾何微分方程式系のもつ性質を利用しながら計算機代数的手法を駆使して計算を遂行するという、別の手法を用いる。計算の流れをおおまかに述べる。

(1)超幾何微分方程式系のグレブナー基底を求める。方程式系を代数的に考えているわけである。ここでは自作の高性能な微分作用素環用グレブナーエンジン yang を用いる。
(2)グレブナー基底の変形により、超幾何微分方程式系と等価な１階線形方程式系を得ることができる。変形に使うベースを固定すれば、この１階方程式系は一意な表現をもつ。ここでの計算も yang を使用する。
(3)１階方程式系の変数変換を求める。変換後は一意性が崩れるが、ベースを選び直すことにより一意性を回復することができる。
(4)微分方程式系の表現方法が一意になっているので、微分方程式系と初期値が一致する条件を求めることができる。この条件は多変数代数方程式系になる。グレブナー基底理論を用いて代数方程式系を満たすパラメータ

の集合を具体的に求める。

アペル・ロリチェラの超幾何関数の場合に、このプランを実行して具体的に結果を得られることを、いくつかの座標変換に関して確認した(松本・小原(2009))。本研究はこの結果を土台にし、それを発展させることによって多変数超幾何関数について関数等式を探索していこうというものである。

３．研究の方法

多変数超幾何関数の公式を計算機代数的手法を用いて探索する。多変数超幾何関数の公式とは、２つの見掛けが異なる多変数解析関数の同一性を主張することである。ある点での関数値と必要な階数の微分係数が一致し、さらに満たすべき微分方程式が一致すれば、微分方程式の解の一意性から、２つの関数は一致する。このプランを遂行するには多変数微分方程式系の同一性判定など扱いの難しい問題を含むが、多変数超幾何関数の場合にはその微分方程式は連立系で与えられるため微分方程式の同一性判定に困難があったのだが、以下で詳述するように計算機代数的手法を用いることで、この問題を突破する方針であった。

まず、雛形となる多変数超幾何関数の満たす関係式を求める。一般にはある種の偏微分方程式系である。この偏微分方程式系を微分作用素環上のイデアル生成元とみなし、そのイデアルのグレブナー基底を求める。つまり方程式系を代数的に考えているわけである。この計算には自作の高性能な微分作用素環用グレブナーエンジン yang を用いることとする。

超幾何微分方程式系は有限次元の解空間をもつので、その解空間の基底を与える微分作用素と、超幾何イデアルのグレブナー基底との交換関係を調べることにより、超幾何微分方程式系と等価な１階線形微分方程式系(いわゆる Pfaff 方程式) を代数的に得る。ここでの計算も yang を使用する。
１階方程式系を変数変換するが、その際、１階方程式系を作るために選んだ解空間の基底も変換されてしまう。従って一意性を保つためには、新しい変数による解空間の基底を選び、その基底で微分方程式を書き直す。これらの処理は行列演算と微分で表現できる。２種の座標変換によって得られた１階方程式系と初期値を比較し、一致するための条件を求める。この条件は多変数代数方程式系になる。グレブナー基底理論を用いて代数方程式系を満たすパラメータの集合を具体的に求める。

この手続きが実行出来れば多変数超幾何関数の公式が得られると考えられる。この計算は近似計算ではダメで完全に厳密な計算(数式処理)が必要である。われわれのプランでは、計算の重要な部分に、微分作用素環でのグレブナー基底を用いる。本研究に対して計算機代数的手法を用いるときの利点のひとつは、計算に用いる微分作用素環用グレブナーエンジン yang をすでにもっていることである。このようなグレブナーエンジンの開発競争が世界中で行われているが、yang は高速であり、他のグレブナーエンジンとちがって微分作用素環の係数に有理式をとることができる(多くのグレブナーエンジンは多項式しかとれない)。実はこの特長が本研究のプランの第２のステップの計算を可能としている(一階化した方程式系の計算には有理関数係数が必要である)。

さらに計算量の膨張問題を克服するために分散計算を用いる。すなわち、単独の計算機上で最初から最後まで問題を解くのではなく、複数の計算機上でプログラムを実行し、互いに通信しながら解答を得るということである。

これらの手続きによって多変数超幾何関数に関する公式を導出し、さらに具体的問題への応用を目指すのが、本課題の研究方法である。

４．研究成果

本課題の研究目的は、多変数の超幾何関数に対し、数式処理を用いて公式を探索することである。

われわれの研究手法では、多変数超幾何関数の局所的性質(微分方程式)を利用して、公式の組織的探索を行うことになる。公式とは見掛けが異なる多変数解析関数の同一性のことであるから、偏微分方程式系することが言えなければならない。これには微分作用素環のグレブナー基底を使えばよいのだが、実際には偏微分方程式系が一致することを証明するのは大変な計算になる。本研究ではこのような複雑な計算を自作の高性能グレブナーエンジン yang を使用し、計算機代数的手法を援用しながら遂行した。

初年度は、グレブナーエンジン yang の機能を拡張し、また大規模計算に耐えうるように性能を向上させる作業を行った。また、方向統計学に由来する Fisher-Bingham 積分と呼ばれる行列変数の(したがって多変数の)超幾何関数に対して、偏微分方程式系を求め

た。さらにそのグレブナー基底から、公式として一階偏微分方程式系を導出し、Fisher-Bingham 積分の極小点を導出する記号的数値解析アルゴリズムを開発した。この極小点導出は方向統計学におけるある種の最尤推定問題の解決に相当する。この結果について、論文を出版して公表した。

次に、Fisher-Bingham 積分よりも難しい場合である Fisher 積分についても、同様の公式を導出することを目指した。これは、回転群 SO(3) 上のウィシャート分布に付随する積分で表示される多変数超幾何関数である。Fisher 積分の最尤推定問題については先行研究も少なく、実行が困難であったものである。われわれは対角成分への制限によって、Fisher 積分に対するこれまで知られていなかった偏微分方程式を発見した。さらにそのグレブナー基底により、Pfaff 方程式系を導出し、極小点を導出する記号的数値解析を実行した。この極小点導出は方向統計学におけるある種の最尤推定問題の解決に相当する。この結果について、2012 年度秋季の日本数学会で発表し、論文を出版して公表した。

また、本研究の関数論的な応用として行列のスペクトル分解・ジョルダン標準形に対する新しい計算法を提案し、日本数学会などで発表した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① T. Sei, H. Shibata, A. Takemura, K. Ohara and N. Takayama: Properties and applications of Fisher distribution on the rotation group, Journal of Multivariate Analysis **116** (2013), 440--455.
DOI: 10.1016/j.jmva.2013.01.010, 査読有

② P. H. Gunawan, S. Omata, K. Ohara and M. Kazama: Droplet collision via the SPH method with surface tension, Gakuto Intern. Ser. Math. Sci. Appl. **34** (2011), 151--156. DOI:無, 査読有

③ H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama and A. Takemura: Holonomic Gradient Descent and its Application to Fisher-Bingham Integral, Advances in Applied Mathematics **47** (2011), 639--658.
DOI: 10.1016/j.aam.2011.03.001, 査読有

〔学会発表〕（計８件）
① 小原功任, 田島慎一, 行列の最小消去多項式とその候補の計算法, 日本数学会 2013 年度年会(代数学分科会), 2013 年 3 月 21 日, 京都大学(京都府).
② 田島慎一, 小原功任, 行列の一般固有空間の構造の決定について, 日本数学会 2013 年度年会(代数学分科会), 2013 年 3 月 21 日, 京都大学(京都府).
③ 小原功任, 田島慎一, 行列の一般固有空間の構造の決定法, Risa/Asir Conference 2013, 2013 年 3 月 17 日, 神戸大学(兵庫県).
④ 小原功任, SO(3)上の Fisher 分布の最尤推定問題と行列変数の超幾何関数, 琉球超幾何セミナー, 2012 年 11 月 21 日, 琉球大学(沖縄県).
⑤ 清智也, 竹村彰通, 小原功任, 高山信毅, SO(3)上の Fisher 積分の満たす微分方程式系とホロノミック勾配降下法による最尤推定, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会(函数方程式論分科会), 2012 年 9 月 18 日, 九州大学(福岡県).
⑥ 小原功任, 田島慎一, Risa/Asir 行列スペクトル分解パッケージの開発, 日本数式処理学会理論分科会＆システム分科会合同研究会, 2012 年 1 月 22 日, 仙台青葉カルチャーセンター(宮城県).
⑦ 小原功任, 田島慎一, 拡張行列ホーナー法と行列スペクトル分解の並列計算, 2011 年 12 月 8 日, 京都大学数理解析研究所(京都府),
⑧ 小原功任, 田島慎一, 最小消去多項式を用いた行列スペクトル分解の並列算法, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会(函数論分科会), 2011 年 9 月 30 日, 信州大学(長野県).

〔その他〕
ホームページ等
http://air.s.kanazawa-u.ac.jp/~ohara/index-j.html

６．研究組織
(1)研究代表者
小原　功任　　（OHARA　KATSUYOSHI）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：00313635

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし