

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月4日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540184

研究課題名（和文） ヒルベルト空間における不変部分空間問題の多角的考察

研究課題名（英文） On many approaches of the invariant subspace problem in Hilbert spaces

研究代表者

大和田 智義 (TOMOYOSHI OHWADA)

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号：50321386

研究成果の概要（和文）：

不変部分空間の問題とは可分なヒルベルト空間上の全ての有界線形作用素は自明でない不変部分空間を持つかという問題である。本研究は、この問題に関連して、作用素環・作用素論の理論、バナッハ空間の理論、およびヒルベルト空間の理論からなど多角的な考察を行う事により、Kolmogorov の分解定理やヒルベルト空間の構造定理、バナッハ空間の幾何学的特徴づけ、そして正規でない作用素スペクトルに関する特徴づけを行い、不変部分空間の問題から派生する多くの理論を発展させた。

研究成果の概要（英文）：The invariant subspace problem is the question that every bounded operator on a separable Hilbert space has a non-trivial invariant subspace. There has been a large amount of work on invariant subspaces, motivated by interest in the structure of non-self adjoint operators on Hilbert space. Our purpose is to investigate this problem on many ways: theory of operator algebras, Banach spaces and Hilbert spaces. And we succeeded in development of much theory relevant to the problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：invariant subspace(不変部分空間), Hilbert spaces(ヒルベルト空間), analytic crossed products(解析的接合積)

1. 研究開始当初の背景

不変部分空間問題の研究は[10]に詳しく纏められている通り、多種多様な理論と結びつき、それらの理論の発展に大きな影響を与えて来たことから、関数解析学の研究において関心の高い課題の一つとなってい

る。例えば、この問題の代数的手法を用いたアプローチとして、本研究課題でも重要な役割を果たす Arveson によるスペクトル部分空間の理論[2]は、Connes のスペクトル理論へと発展して、1982年にフィールズ賞を受賞するなど、その理論の発展に大きく

貢献している。Arveson のスペクトル部分空間やsubdiagonal 環 [1] を用いた不変部分空間の研究に誘発されて、多くの代数的手法を用いた理論が発展しているが、特に解析的接合積の研究は、不変部分空間の問題は勿論、ハーディ空間の非可換版として近年盛んな作用素空間の研究に影響を与えるなど、その研究に対する関心は世界中で高まっている。

国内においては河村と富山 [6] による subdiagonal 環の研究に端を発し、その後の斎藤 [11] による解析的接合積や subdiagonal 環の不変部分空間の研究は、中路の関数空間における不変部分空間の理論と結びつき、中路と綿谷 [7] の subdiagonal 環の不変部分空間の分類定理へ発展した。2011年には植田 [12] により、非可換ハーディ空間の predual の一意性が示されるなど、関心の高い研究分野の一つとなっている。

海外においても本研究課題の分野への関心は高く、Blecher [3], Pisier [9], Effros-Ruan [4], そして Haagerup, Junge, Xu [5] を中心とした作用素空間の理論が急速に発展しており、それにともない関数空間の非可換化や、非可換ハーディ空間および subdiagonal 環の研究が、米国や西欧を中心として盛んに行われている。これらの関連する国内外の研究者との研究交流を推進することができれば、本研究課題は大きな発展が見込まれる急務な課題である。

これらの流れを受け、大和田は近年、作用素空間の構造解析を中心とした不変部分空間問題へのアプローチを行ってきた。その研究の過程 [8] で、スペクトル部分空間の構造、特にその極大性、と半群の理論の間に密接な関係にあり、それは不変部分空間の構造とも関係があるという着想に至った。半群の理論と関連付ける代数的手法はこれまでにない独創的なアプローチであり、その理論の発展は不変部分空間問題ばかりで無く、関連する多くの分野の理論へ大きな影響を与えるものと期待された。

参考文献

- [1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 578-642.
 [2] W. B. Arveson, On groups of automorphisms of operator algebras. *J. Funct. Anal.*, 15 (1974), 217-243
 [3] D. P. Blecher and M. Neal, Metric characterizations of isometries and of

unitary operator spaces and systems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(2011), no. 1, 47-70.

- [4] E. G. Effros and Z.-J. Ruan, *Operator spaces. London Mathematical Society Monographs. New Series, 23.* The Clarendon Press, Oxford University Press, 2000.
 [5] U. Haagerup, M. Junge and Q. Xu, A reduction method for noncommutative L_p -spaces and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(2010), no. 4, 2125-2165.
 [6] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, *J. Math. Soc. Japan*, 29 (1977), 73-90.
 [7] T. Nakazi and Y. Watatani, Invariant subspace theorems for subdiagonal algebras, *J. Operator Theory*, 37 (1997), 379-395.
 [8] T. Ohwada, On some subalgebras of von Neumann algebras with analyticity, *J. Funct. Anal.*, 222 (2005), 274-291.
 [9] G. Pisier and Q. Xu, Noncommutative L^p spaces, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, vol. 2, 1459-1517, North-Holland, Amsterdam, 2003.
 [10] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspaces.* Second edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003
 [11] K-S. Saito, Invariant subspaces and cocycles in nonselfadjoint crossed products, *J. Funct. Anal.*, 45 (1982), 177-193.
 [12] Y. Ueda, On the predual of non-commutative H^∞ . *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(2011), no. 5, 886-896.

2. 研究の目的

この研究では、不変部分空間問題の解決を目指し、作用素空間におけるフーリエ解析やスペクトル理論を用いて、非可換ハーディ空間やスペクトル部分空間の構造を調べる事により生じる、以下のような問題の解決を目的とした。

- (1) 正規でない作用素からなる部分環の構造と、それに関する不変部分空間を詳細に調べることにより、正規でない作用素の性質を考察すると共に、関連する不等式の開発を行う。

- (2) 可換なハーディ環や関数環の理論を詳細に調べて、その理論から非可換ハーディ空間や非可換関数空間の理論を構築する。
- (3) 非可換関数空間の典型的な例を与える接合積を考えて、非可換なフーリエ解析の理論を用いて、非可換ハーディ空間の解析的性質を詳細に調べるとともに、その不変部分空間の構造を明らかにする。
- (4) 非可換ハーディ空間により定義された Toeplitz 作用素や Hankel 作用素の性質や構造をその行列表現を利用して調べる。
- (5) Arveson のスペクトル理論を利用して、その部分環の代数的構造を半群の理論を用いて詳細に調べる。

3. 研究の方法

本研究目的を達成するために、研究分担者として斎藤(新潟大学)の非可換ハーディ空間とその不変部分空間に対する専門的知識およびバナッハ空間における関数解析的なテクニックと、綿谷(九州大学)のヒルベルト空間の部分空間の配置や作用素環・作用素空間に関する専門的知識が必要であった。また、研究協力者である中国の陝西師範大学教授の Ji とは、これまでも共通の問題意識をもって多くの共同研究を行ってきたが、本研究課題に関しても引き続き Ji の関数空間における解析的手法とその不変部分空間の理論および作用素論における不変部分空間の専門的知識が必要であった。これら3名の研究者それぞれの専門的知識が研究代表者を中心とし有機的に結びつきながら影響し合い、以下のような計画・方法で課題研究を推進した。

- (1) 非可換ハーディ空間により定義される Toeplitz 作用素や Hankel 作用素の構造を、その行列表現を用いることにより詳細に調べ、今までの Toeplitz 作用素や Hankel 作用素の理論を再構築するとともに、関数空間の理論の非可換化を進める。そのために、新潟大学で研究打合せを行う。(大和田, 斎藤)
- (2) 二次元トーラス上のルベーグ空間における不変部分空間の構造を、シフトにより生じる様々な部分空間を利用して分類すると共に、その理論の非可換化を進める。そのために、新潟大学および陝西師範大学で研究打合せを行う。(大和田, 斎藤, Ji)
- (3) 作用素空間の研究に Arveson のスペ

クトル理論を用いることにより、その部分空間と半群の理論を結びつけて代数的な特徴づけを行うとともに、非可換フーリエ解析の理論を利用した解析的特徴付けも行う。そのために、新潟大学および九州大学で研究打合せを行う。(大和田, 斎藤, 綿谷)

(4) 綿谷が精力的に行っているヒルベルト空間の部分空間の配置に関する研究を通じて、不変部分空間の構造を考察する。そのために、九州大学および陝西師範大学で研究打合せを行う。(大和田, 綿谷, Ji)

4. 研究成果

本研究の目的は、ヒルベルト空間における不変部分空間の問題に関連して、自己共役でない作用素環の構造を詳細に調べると共に、それに関する不変部分空間の構造解析を行うものである。解析的接合積は接合積の自己共役でない部分環としてよく知られていて、これまでに多くの興味深い結果が得られている。その一方で解析的部分環は Arveson によるスペクトル解析の研究に動機付けられ、作用素環における解析性の研究を中心に不変部分空間の構造や分解性そして極大性など様々な研究が盛んに行われてきた。von Neumann 環のある部分環を真に含む部分環は全体である場合、その部分環は極大であるという。解析的接合積における σ 弱閉部分環の極大性の問題は 1980年代から盛んに行われているがそれらの研究は全て semigroup を固定して考えられてきた。我々は極大性の問題を semigroup の性質と結び付けて捉え直すことにより、その構造をより深く理解することが出来るのではないかと予想した。実際に、解析的接合積の diagonal が因子環であるとき解析的接合積が極大なら、付随する semigroup はどのような条件を満たさなければならないかを考え、archimedean totally order を引き起こす場合に限ることを証明した。この解析に誘発されて接合積の diagonal が因子環の場合、その diagonal を含む双対作用に関して不変な σ 弱閉部分環と semigroup との間の一対一対応が付くことを突き止めて統括的に極大性の議論を論じることに成功した。

また、これらの研究に関連して、von Neumann 環における Kolmogorov の分解定理や、ノルム不等式に関する特徴づけを行った。更に、バナッハ空間およびヒルベルト空間における基本的な構造の解析を行い、主にその幾何学的な特徴付けを行うと共に、正規でない作用素に関する不変部分空間の問題に関連して、それら

の作用素のスペクトルに関する特徴づけも行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

- ① K. Nakade, T. OHWADA and K.-S. SAITO, Kolmogorov's factorization theorem for von Neumann algebras, J. Math. Anal. Appl., 査読有, Vol. 401, 2012, 289–292
- ② K. MINENO, Y. NAKAMURA and T. OHWADA, Characterization of the intermediate values of the triangle inequality, 査読有, Vol. 15, 2012, 1019–1035
- ③ N. NAWATA and Y. WATATANI, Fundamental group of simple C^* -algebras with unique trace II, J. Funct. Analysis, 査読有, Vol. 260, 2011, 428–435
- ④ M. S. MOSLEHIAN, M. TOMINAGA and K.-S. SAITO, Schatten p -norm inequalities related to an extended operator parallelogram law, Linear Algebras and Applications, 査読有, Vol. 435, 2011, 823–829

[学会発表] (計 23 件)

- ① K.-S. SAITO, How to calculate James constant of Banach spaces?, The fourth International symposium on Banach and Function Spaces, September 13 2012, 九州工業大学
- ② M. ENOMOTO and Y. WATATANI, 無限次元ヒルベルト空間上の Kronecker quiver の brick ヒルベルト表現, 日本数学会年会, 2012 年 3 月 29 日, 東京理科大学
- ③ T. OHWADA, On reverse of the triangle inequality in normed linear spaces, The 7-th International conference on Non-linear Analysis and Convex Analysis, Augst 3 2011, Pukyong National University (韓国)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大和田 智義 (TOMOYOSHI OHWADA)

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号 : 50321386

(2) 研究分担者

斎藤 吉助 (KICHI-SUKE SAITO)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号 : 30018949

綿谷 安男 (YASUO WATATANI)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号 : 00175077