様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２６ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４０１８８

研究課題名（和文）点過程およびギブス場の理論の整備と、平衡過程、フェルミオン過程等の応用と一般化

研究課題名（英文）Reconstruction of the theory of pont processes and Gibbs random fields and its application to equlibrium processes, fermion processes etc.

研究代表者
高橋　陽一郎（Takahashi, Yoichiro）

東京大学・生産技術研究所・名誉教授

研究者番号：２００３３８８９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：確率点場(点過程)に付随するFock空間で表現する新たな一般的方法を発見し、平衡過程、Gibbs測度、fermion(行列式)過程、boson(パーマネント)過程など主要な確率場をこれに基づいて簡明に記述する方法を見出した。その応用例として、平衡過程に対するレベル３の大偏差原理を導いた。
　さらに、これと関連したトピックの研究を行い、例えば、確率過程における急減少(cut-off)現象が(ボルツマン方程式等における)カオスの伝播として理解され、見通し良く証明できることをEhrenfest模型等の場合に示した。

研究成果の概要（英文）：A new general method to construct a Fock space representation associated with a given point process or random point field is introduced. It gives a simple description of important random fields such as equilibrium processes, Gibbs point fields, fermion(determinantal) processes and boson(permanental) processes.
　In addition, the rapid mixing or cut-off phenomenon in Markov chains such as Ehrenfest model is shown to be a special case of the propagation of chaos (in the theory of Boltzmann equation), and which leads to a short proof without tedious computation.

研究分野：確率解析・力学系、とくに統計力学と関連する数学的諸問題

キーワード：点過程(確率点場)　Gibbs測度　一般化Fock空間　フェルミオン過程　fermion(行列式)過程　平衡過程　大偏差原理　カオスの伝播

１．研究開始当初の背景

可算無限粒子からなる粒子配置空間の上の確率測度はさまざまな局面で現れる。最も古くから研究されてきたのは 1837 年に遡ることのできるポアソン点過程である。1960 年代に古典統計力学の数学的基礎として定式化された Gibbs 測度は、現在では確率論や力学系理論の基礎概念のひとつである。また、乱雑行列理論におけるガウス・ユニタリ・アンサンブル等は、フェルミオン過程（行列式過程）等（白井 - 高橋 2002）として定式化でき、急速な数学的展開を見せていた。共形場理論の具体例でもあり、Werner のフィールズ賞受賞で広く認知されるようになった SLE (Schramm-Loewner Evolution) の研究から生れた確率モデルの多くも点過程である。ただし、その場合の点（粒子）はループなどそれ自身が幾何学的構造をもつものとなる。かつてそのエルゴード理論的諸性質等を調べた平衡過程（志賀 - 高橋 1974）もマルコフ過程の経路を点と見たポアソン測度である。

これらの諸研究は対象毎に個別に発展してきたものであり、例えば、乱雑行列理論における特殊関数論の駆使に象徴されるように、局面毎に数々のアイデアが必要となり、それ自身はそれぞれにたいへん興味深いが、少し一般的に踏み込んだ数学的研究を試みる際には、その記述方法あるいは枠組のレベルで困難に直面することも多かった。申請者が 1990 年頃から着手した散乱距離の問題（1970 年代の M. Kac たちの研究に始まるもの）もその例であり、ブラウン運動の場合のみ直接計算により示されるものであった。これに対して、見通しのよい証明方法が浮上した。

鍵となったのは、ポアソン測度に付随するフォック空間表現が（組合せ論的な議論の積み重ねなしに）簡明な形で関数解析的に構成できることの発見であった（Y. Takahashi, 数理解析研究所プレプリント RIMS-1681, 2009）。さらに、その際に導入した作用素はギブス測度の相関関数と（局所）密度関数の対応を与える明快に記述するものあり、このように整理した記述法を用いることにより、パルム測度の絶対連続性によるギブス測度の特徴づけ（『Gibbs 測度の特徴づけ』Seminar on Prob. vol. 46, 1977）という 1980 年代以来懸案であった問題も解決も視野に入れることができる。

本研究は、そのような記述方法をさらに一般化するとともに、それを土台として幾つかの積年の課題に挑戦しようとするものであった。

２．研究の目的

本研究の目的は、以下の課題に取り組むことであった。

【課題１．点過程論としてのギブス測度の理論の再構成】

これまでの点過程論における諸結果、とくに古典平衡統計力学における極限 Gibbs 分布を巡る古典的諸結果（例えば、D. Ruelle の著書「Statistical Mechanics. Rigorous Results」1968）を整理して再構成し、簡明で一般的な形に書き換え、簡明で一般的な形での再構成を試みる。

【課題２．点過程論の整備を土台とした諸課題への応用】

以下の３課題への応用あるいは挑戦を試みる。

(1) 課題２Ａ．平衡過程に対する経路レベルの大偏差原理

散乱理論における散乱距離は、互いに独立な可算個のブラウン運動からなる平衡過程に対する大偏差関数であると予想される。これを課題１の成果をもとに証明する。さらに、それは状態空間レベルでの大偏差原理であるので、経路空間上での大偏差原理の確立を目指す。

(2) 課題２Ｂ．“退化した Gibbs 測度”を巡る諸課題

例えば、非負定値対称積分作用素に付随する離散空間上のフェルミオン過程は、そのスペクトルが１未満であれば、Gibbs 測度となる（白井－高橋）。しかし、例えば、sine 核の場合など、射影行列式過程（射影作用素に付随するフェルミオン過程）は退化した場合であり、Gibbs 性の有無は未知である。他方、この種の “退化した Gibbs 測度” には種々の具体例があり、応用上極めて重要である。これらに関して、有界領域におけるパルム測度の密度関数の具体的表示、および無限体積極限の Gibbs 性の問題に取り組み、さらに、Gibbs 性をもつ場合ともたない場合があるものと予想されるので、その判定の問題の解明にも挑戦する。

(3) 課題２Ｃ．Dynkin 同型、離散ループ測度、ループ消去マルコフ連鎖

これはさらに挑戦的な課題である。ループ空間上の測度は、熱核（推移確率）に時間の逆数を掛けて重ね合わせて得られる測度からきまる。このような測度は、1969 年の Symanzik の論文 “Euclidean quantum field theory” に現れ、Varadhan がその Appendix でブラウン運動の交差回数との関係を指摘し、発散のくり込みの問題を論じたものである。また、ループ消去マルコフ連鎖は、マルコフ連鎖から経路の自己交差で生じるループを削除して得られるもの

であり、一般にマルコフ性は喪失するが、その汎関数ではある。その後 Dynkin 同型を巡る研究や共形場理論の視点からの SLE の研究に関連してこの種の確率モデルが注目されているのは自然な成り行きと言えそうであり、同時に未解決問題が山積している。われわれの視点から言えば、ループ測度は点過程であり、少なくとも、ループをもたないマルコフ連鎖はフェルミオン過程である（A. Borodin 2008)。

３．研究の方法

本研究におけるアプローチの土台は、高橋が展開した点過程あるいは random point fields の記述方法である (Proc. Japan Acad., 86 Ser. A (2010), 60-63)。これにより、原則的には、相関関数と Palm 測度をもとに一般の点過程を Fock 空間により表現でき、その表現においては、ある作用素 T を導入することにより同型対応が構成でき、組合せ的な計算は作用素の形式的演算に置き換わることになる。

しかし、実際に適用する際は、確率点場の点が幾何構造をもつことになる。例えば、平衡過程が経路を点とするポアソン場であり、ループ測度は閉路を点とする確率場である。従って、理論の枠組みを拡張する必要があり、そのとき、それらの幾何構造の本質を適切に反映した枠組を構築できるかが挑戦の内容となる。

４．研究成果

【課題１】

幾何構造を考慮しない一般論的な枠組に関しては、予備的な考察を行った Proc. Japan Acad. 86 Ser. A (2010) に述べた内容が成果の骨子となる。申請段階では課題１および課題２A についてはレクチャーノートとしてまとめる予定であったが、未だ進行中である。そこでは、Ruelle の著書 Statististical mechanics, rigorous result (1969) において Gibbs 場に関して導入された「代数的方法」をさらに押し進めて、ある作用素 T を導入することにより、組合せ的な議論を形式的計算に帰着することができ、相関関数と Palm 測度のより簡明な記述法を与え、Fock 空間の構成を含めて、確率点場（点過程）の一般的理論が展開されることを述べている。それらを利用すると、Gibbs 場、フェルミオン（行列式）過程、ボゾン（パーマネント）過程なども見通し良く理解できる。さらに、平衡過程の汎関数を Fock 空間上の関数として捉えることができ、大偏差関数を導くことができる。

【課題２A】

非再帰的な対称マルコフ過程に対して散乱距離の概念が拡張されることは高橋 1990 において示したが、その無限個のコピーからなる平衡過程に対する大偏差汎関数として特徴づけられることがわかり、レベル３の大偏差原理への拡張もほぼ完成し、発表準備中である（高橋：Scattering length and large deviation for the symmetric equilibrium process)。

不変測度 λ をもつ非再帰的なマルコフ過程 $X(t)$ に付随する平衡過程とは、互いに独立な $X(t)$ の無限個のコピーからなる粒子配置 $\xi(t)=\{X_i(t);\ i \geq 1\}$ のなすマルコフ過程であり、強度 λ のポアソン確率場 π_λ は $\xi(t)$ の不変分布となる。すなわち、任意の $t>0$ に対して

$$\int \pi_\lambda(d\xi_0)\exp(-\langle \xi_t, f\rangle) = \exp\int d\lambda(1-e^{-f})$$

となる。志賀 - 高橋 1973 で示したように、平衡過程は、$X(t)$ の経路空間上での定常分布 $\Lambda = \int \lambda(dx) P_x$ を強度とするポアソン場 Π_Λ として捉えるのが数学的に自然であり、また、基礎となる $X(t)$ の非再帰性の度合いが強いほど、$\xi(t)$ の正再帰性の度合いが強い。このとき、平衡過程は Fock 空間表現をもち、互いに独立な $X(t)$ の有限個のコピーの直和となる。これより、対称なマルコフ過程の場合には、非再帰的な $X(t)$ に対する大偏差原理が正再帰的な $\xi(t)$ の大偏差原理と対応することが証明された。

さらに、この大偏差原理は，以下のように数理物理における散乱問題と結びつくことがわかった。ポテンシャルを v とするとき、その散乱距離 $\Gamma(v)$ とは、散乱の確率振幅の波数 $k \to 0$ での極限をいう。M. Kac（1951, 1970, 1974）が示したように、ϕ_0 を積分方程式 $\phi_0 = 1-(1/2\pi)\int dy\ v(y)\phi_0(y)/|x-y|$ の解として、$\Gamma = (1/2\pi)\int dy\ v(y)\phi_0(y)$であり、確率論的には、 $\Gamma(v)$ は

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_W \Lambda(dw)\left[1-\exp\left(-\int_0^t v(w(s)ds)\right)\right]$$

と表される。ここで、W は３次元ブラウン運動の経路空間、x から出発した確率測度を P_x として、

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{R^3} dx P_x.$$

この形から、散乱距離は平衡過程における大偏差原理関数 $I(\rho)$ を用いて、

$$\Gamma(v) = \inf\{\langle\rho, v\rangle - I(\rho)\}$$

と表されることが予想できる。その一般化のためにはある種の緊密性を仮定した議論が必要となったが、非再帰的対称マルコフ過程に対して証明に成功した（発表準備中）。なお、高橋 1990 では、既に散乱距離の概念が非再帰的対称マルコフ過程に対しても拡張され、経路空間上の積分表示をもつことを示している。

【課題２B,C】
申請時に挙げたこれらの挑戦的な課題については思わしい結果は得られず、既知の結果を書き直すことができることが確認されるに留まった。その主たる原因は、点に付与すべき幾何構造を適切に関数解析的もしくは形式演算的な枠組に取り込むことができなかったことに尽きる。しかしながら、その試行錯誤の過程から、二三の結果を得ることはできた。

- ユニタリ行列と対称群上の確率

  量子物理学的な時間発展はユニタリ作用素で記述され、確率的解釈ができる。Fock 空間上にユニタリ作用素が与えられたとき、確率が定まるかという素朴な疑問について考察し、予想を提起した(数理解析研究所講究録 1462 (2006), 217-223 参照)。
- マルコフ連鎖における急減少（カットオフ現象）とカオスの伝播。

  Diaconis 他が発見し、表現論的な計算によって証明していた“不可思議な”現象は、かつて M. Kac, H.P. McKean, 田中洋たちが Boltzmann 方程式の確率論的研究の中で確立したカオスの伝播として自然に理解され、かつ、簡単に証明できることがわかった（数理解析研究所講究録別冊 B34(2012)）。例えば、典型的な N 粒子の Ehrenfest 模型は、N 次元立方体上の酔歩に持ち上げることができる。その N 個の座標のうち、特定の n 個にのみ着目すれば、$N\to\infty$ のとき、これら n 個の座標は互いに独立な酔歩に近づく。すなわち、カオスの伝播が生じる。そのとき、各座標の確率分布は Wasserstein 距離(もしくは田中の距離）に関して収束する。それがカットオフと呼ばれる急減少の正体であった。この証明は極めて簡単であるので、入門書『確率論入門 II』(培風館 2015）にも掲載することができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① 髙橋陽一郎：カオスの伝播とカットオフ現象:エーレンフェスト模型の場合, 数理解析研究所講究録, 1855 巻, 236-244, 2013 (査読無). http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1855-33.pdf

② Yoichiro Takahashi: Unitary matrices and random permutations: conjecture and degenerated Laplacian, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B34, 445-461, 2012 (査読有). http://hdl.handle.net/2433/198067

③ Yoichiro Takahashi: Construction of Poissonian Fock space: a simple proof, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 60-63, 2010 (査読有). https://projecteuclid.org/euclid.pja/1267625641

〔学会発表〕（計　3　件）

① 髙橋陽一郎：カオスの伝播とカット・オフ：エーレンフェスト模型の場合, 数理解析研究所研究集会: 『確率論シンポジウム』(招待講演), 2012 年 12 月 18 日～2012 年 12 月 21 日, 京都大学, 京都市.

② 髙橋陽一郎：カオスの伝播とカット・オフ現象, 研究集会『無限粒子系、確率場の諸問題Ⅷ』(招待講演), 2012 年 10 月 20 日～2012 年 10 月 21 日, 奈良女子大学, 奈良市.

③ Yoichiro Takahashi: Unitary matrices and probability, The international conference: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, December 13th, 2010, Kyoto University, Kyoto, Japan.

〔図書〕（計　1　件）

① 池田信行, 小倉幸雄, 髙橋陽一郎, 眞鍋昭治郎：確率論入門Ⅱ, 培風館, 2015, 381 ページ.

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕

特になし

６．研究組織

(1)研究代表者

髙橋陽一郎（TAKAHASHI, Yoichiro）
東京大学・生産技術研究所・名誉教授
研究者番号：20033889

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし