

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14303

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540189

研究課題名（和文） 3次元における特異磁場をもつシュレディンガー作用素のスペクトル解析

研究課題名（英文） Spectral analysis of Schrödinger operators with singular magnetic fields in three dimensions

研究代表者

岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)

京都工芸繊維大学・工学科学研究科・教授

研究者番号：40184890

研究成果の概要（和文）：トーラス内に台をもつような磁場をもつシュレディンガー作用素が、そのトーラスの太さが無限に小さくなる場合に、円周上に特異性をもつ作用素にレゾルベントがノルム収束し、収束先の作用素は円周上でディリクレ境界条件を科せられた3次元での特異性をもつ磁場をもつシュレディンガー作用素であり、3次元空間で特異性をもつモデルを作ったが、この結果をより一般的な条件に拡張し、さらにこの作用素に対して、スペクトルが絶対連続であり、散乱作用素の漸近完全性を示すことが出来た。

研究成果の概要（英文）：We extended our previous results concerning the norm convergence of the Schrödinger operators to some operator with a singular magnetic field supported on a circle when the the thickness of the torus tends to zero, and showed the absolute continuity of the spectrum of the obtained operator with singular magnetic fields and the asymptotic completeness of its scattering operators.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：作用素論

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：(1) 関数方程式論 (2) 関数解析学 (3) 数理物理 (4) スペクトル (5) 散乱理論

1. 研究開始当初の背景

(1) アハラノフ・ボーム効果として知られる現象は、磁場のベクトルポテンシャルが実在すると見なされることが理論的に示され、物理学者の間に大きな問題提起を行ったが、多くの実験や議論を経て、外村彰らによってドーナツ状の領域に閉じこめられた磁束を用いての実験により決定的な検証がなされたとされている。このアハラノフ・ボーム効果に関連して、

無限に細いソレノイドによって生成される磁場がモデルとして考えることができ、これは、2次元平面ではアハラノフ・ボーム磁場あるいは点磁場と呼ばれるデルタ関数的な特異性を持つ磁場、3次元以上の空間内では線上に特異性をもつ磁場となる。最近2次元空間ではゼロ磁場あるいは定数磁場からの摂動として（無限に多い点の場合を含む）点磁場など特異性をもつ磁場をもつシュレディンガー作

用素，ディラック作用素のスペクトル・散乱理論的な研究が連携研究者の田村英男らにより進められている。

- (2) 3次元空間内で直線以外の線的な特異性をもつような磁場，特に円周上に台をもつような磁場を考えることにより研究代表者と連携研究者の峯，島田と行った研究以外では殆ど調べられていない。ここでは，2次元での田村と類似の結果を，3次元空間で円周上に特異性をもつ磁場に対して得ることができた。すなわちトーラス内に台を持つような磁場をもつシュレディンガー作用素がそのトーラスの太さが無限に小さくなる場合に円環上に特異性をもつ作用素にレゾルベントがノルム収束することが示せた。この結果を基にして今後の様々な発展が期待できるものと考えられる。

2. 研究の目的

- (1) トーラスの外部領域でディリクレ境界条件を課した作用素が，トーラスを無限に細くしたときに同じ作用素にノルム・レゾルベント収束するかを調べる。また2次元の場合に連携研究者の田村英男が得たような適当な電場のポテンシャルを付加した場合に他の境界条件が現れるかどうかを調べる。
- (2) 散乱理論に関して，2次元のデルタ磁場に関する一連の連携研究者の田村英男の研究にあるような散乱振幅，散乱断面積，スペクトル・シフト関数の計算などが具体的な形で得られるかどうか調べる。
- (3) ディラック作用素あるいはパウリ作用素のスペクトル的性質について調べる。更に定数磁場に上記の特異磁場による摂動を加えた場合のスペクトル的性質について調べる。アハラノフ・ボーム効果を検証した外村彰らによる実験を，無限に細いソレノイドによって生成される磁場によりモデル化し，3次元空間内で円周上に特異性をもつ作用素を考えることにより，具体的な散乱振幅などの計算が可能とすることが期待できる。
- (4) 新しいモデルを，今まで研究が進んできた2次元の点的な特異性をもつ磁場に対する連携研究者などによる定数磁場や周期的あるいはランダムな複数の点磁場をもつ場合などを含む様々な結果を，3次元に拡張した場合にどうなるかを調べる。とりわけ3次元空間内の複数の円周の位置関係は2次元の場合に比べ遙かに複雑となるため，この研究には，関数解析的手法，偏微分方程式論的手法，確率論的手法，幾何学的手法，関数論的手法など

多くの手法が必要となり，それに伴って副次的な成果として新たな手法を開発することも目的とする。

3. 研究の方法

- (1) 研究代表者は，従来の結果について連携研究者に周知させ，全体の研究の統括をした。峯，島田とは随時打合せをし共同研究をおこなった。田村，伊藤は数理解析研究所で研究代表者が主催している作用素論セミナーで，主に研究打合せを行い共同研究を実行した。またこのセミナーで随時関連する研究者に講演をしてもらい情報収集を行った。
- (2) 連携研究者各自が多方面の関連部門の研究者と意見交換および研究討論をし，情報収集，資料収集した。特に研究代表者は数理解析の研究が活発に行われ，多くの研究者が集まる海外を含む研究集会に参加し研究計画についてレビューを受け資料および情報収集を行った。

4. 研究成果

- (1) 研究代表者の平成21年度迄の研究により，トーラス内に台を持つような磁場をもつシュレディンガー作用素が，そのトーラスの太さが無限に小さくなる場合に，円周上に特異性をもつ作用素にレゾルベントがノルム収束し，収束先の作用素は円周上でディリクレ境界条件を課せられた3次元での特異性をもつ磁場をもつシュレディンガー作用素であり，3次元空間で特異性をもつモデルを与えた。⑧でこの結果をより一般的な状況に拡張した。すなわち，任意に与えられた磁場に対して，相似性をもちかつ一定の磁束を保つようなトーラス内に閉じ込められた磁場の場合，および，トーラスの外部領域でトーラスの境界にディリクレ条件をつけた場合に，トーラスの太さを無限に細くしたとき同じ作用素にノルム・レゾルベント収束することを示した。また極限で得られる作用素のスペクトルが絶対連続であり，全空間の自由粒子の運動を表す作用素との間の，散乱作用素の漸近完全性を示した。
- (2) 連携研究者の田村英男は，複数のソレノイド磁場による散乱におけるレゾナンスについて，アハラノフ・ボーム効果の数理を準古典漸近的な視点から研究した。複数のソレノイド磁場による散乱においては，磁場の中心間で振動する古典軌道が存在し，いわゆる捕捉現象が

発生する。このような軌道が実軸近傍にレゾナンスをいかにして生み出すかを解析し、レゾナンス幅(レゾナンスの虚数部)に対して下からの精密な評価を与え、アハラノフ・ボーム効果との関与を明らかにした。これらの結果は③, ④の2編の論文にまとめられている。

- (3) ⑦で連携研究者の峯拓矢は2次元内の定数磁場をもつシュレディンガー作用素に周期的なアハラノフ・ボーム点磁場を加えたときにランダウ・レベル固有値が無限に縮退するための条件を調べた。また最底および2番目に小さいランダウ・レベルの近くでのスペクトルが絶対連続になるための条件を与えた。また②で2次元上半平面に負定曲率を与えたポアンカレ平面で定数磁場に格子上にアハラノフ・ボーム点磁場を周期的に加えた場合にランダウ・レベルの無限次元縮退に関する研究を行った。また①では、周期的な電場のポテンシャルをもつ場合の2次元のベーテ・ゾンマーフェルト予想を一般的な条件を満たすポテンシャルに対して示し、この結果を2次元のポアソン・ランダムなポテンシャルに応用し、一般のポテンシャルが負の部分をもつ場合のシュレディンガー作用素のスペクトルが全直線と一致することを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8件)

- ① M. Kaminaga, T. Mine, Upper bound for the Bethe-Sommerfeld threshold and the spectrum of the Poisson random Hamiltonian in two dimensions, *Annales Henri Poincaré* 14, no. 1, 37-62, 2013, 査読有
- ② T. Mine, Y. Nomura, Landau levels on the hyperbolic plane in the presence of Aharonov-Bohm fields, *J. Funct. Anal.* 263, no. 6, 1701-1743, 2012, 査読有.
- ③ H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions, *Kyoto J. Math.* 52, 557-595, 2012, 査読有.
- ④ I. Alexandrova, H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators with potentials with supports at large separation, *Ann. Henri Poincaré* 12, 679-721, 2011, 査読有.

- ⑤ H. T. Ito, O. Yamada, Relativistic Hamiltonians with dilation analytic potentials diverging at infinity, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, Vol. 68 (4), 1-47, 2011, 査読有.
- ⑥ H. T. Ito, O. Yamada, On the nonrelativistic limit of Dirac operators with potentials diverging at infinity, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B16, 75-89, 2010, 査読有.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B16/pdf/B16-04.pdf>
- ⑦ T. Mine, Y. Nomura, The spectrum of Schrödinger operators with periodic Aharonov-Bohm magnetic fields, *RIMS kokyuroku Bessatsu* B16, 135-140, 2010, 査読有.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B16/pdf/B16-08.pdf>
- ⑧ A. Iwatsuka, T. Mine, S. Shimada, Spectral properties of Schrödinger operators with singular magnetic fields supported by a circle in R^3 , *スペクトル散乱理論とその周辺*, 数理解析研究所講究録 1696, 2010, 査読無.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyoky/kokyuroku/contents/pdf/1696-07.pdf>

[学会発表] (計 1件)

- ① A. Iwatsuka, Schrödinger operators with singular magnetic fields supported by a circle in R^3 , The Third St. Petersburg Conference in Spectral Theory, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia, July 5th, 2011.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：40184890

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

田村 英男 (Tamura Hideo)

岡山大学・自然科学研究科・特命教授

研究者番号：30022734

峯 拓矢 (Mine Takuya)

京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授

研究者番号：90378597

島田 伸一 (Shimada Shin-ichi)

摂南大学・工学部・准教授

研究者番号：40196481

伊藤 宏 (Ito Hiroshi)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：90243005