

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 6 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540190

研究課題名（和文） 低次元ダイナミカルシステムに適合する相空間解析法の新構築

研究課題名（英文） New construction of phase space analysis that conforms to low-dimensional dynamical systems

研究代表者

杉江 実郎（SUGIE JITSURO）

島根大学・総合理工学研究科・教授

研究者番号：40196720

研究成果の概要（和文）：相平面解析法を整備・構築し，低次元の線形微分方程式系・半分線形微分方程式系・準線形微分方程式系の平衡点（または零解）が漸近安定性，大域的漸近安定性，一様大域的漸近安定性であるかどうかを判定する基準を解明した。

得られた基準は小型船の自由横揺れ運動の解析に応用された。小型漁船の自由横揺れ運動に作用する抵抗は主に3種類あることがよく知られている。即ち，摩擦抵抗と造渦抵抗（粘性圧力抵抗とも呼ばれる）と造波抵抗である。造波抵抗は角速度に比例するが，摩擦抵抗と造渦抵抗は角速度の自乗に比例する。そのため，横揺れの運動方程式は優線形振動子で記述されなければならない。この研究で，優線形振動子の平衡点が大域的漸近安定になるための必要十分条件が見出された。

上記の基準は，環境の時間変化の影響を受ける被食者（または捕食者）をもつロトカーボルト型捕食者・被食者モデルにも応用された。このモデルは生態モデルとして有名であり，内部平衡点が唯一つ存在する。この研究で，内部平衡点が大域的漸近安定になるための十分条件が得られた。さらに，被食者の移入を考慮したローゼンツウァイクーマカッサー型捕食者・被食者モデルの極限閉軌道の一意性問題についても議論した。

研究成果の概要（英文）：Phase space (or plane) analysis was improved and constructed in order to clarify criteria which judge whether the equilibrium (or the zero solution) of low-dimensional linear differential systems, half-linear differential systems, or quasi-linear differential systems is asymptotically stable, globally asymptotically stable, or uniformly globally asymptotically stable.

The obtained criteria were applied to the analysis of the free rolling motion of a small ship. It is well-known that the resistance of free rolling motion of a small fishing vessel is mainly classified into three types: frictional resistance; eddy-making resistance (or viscous pressure resistance); wave-making resistance. Although wave-making resistance is proportional to the angular velocity, frictional resistance and eddy-making resistance are proportional to the square of the angular velocity. For this reason, the equation of rolling motion need be described by a damped super-linear oscillator. In this research, a necessary and sufficient condition for the equilibrium of the damped super-linear oscillator to be globally asymptotically stable was found out.

The above-mentioned criteria were also applied to a Lotka-Volterra predator-prey model with prey (or predator) receiving time-variation of the environment. This model is very famous as an ecology model and have a unique interior equilibrium. In this research, sufficient conditions for the interior equilibrium to be globally asymptotically stable were obtained. Moreover, the uniqueness problem of limit cycles about a Rosenzweig-MacArthur predator-prey model in consideration of immigration of prey was discussed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式論・相平面解析・漸近安定性・半分線形系・優線形振動子・概周期関数・船舶の自由横揺れ・極限閉軌道

1. 研究開始当初の背景

2次元自励系に対しては、相空間(相平面)解析を用いる研究が古くから数多く行われてきた。相平面解析とは、与えられたダイナミカルシステムの解を相平面上に射影して、その挙動から解の性質を調べる解析法である。つまりは、解軌道の動きを幾何学的に捉えようとする試みである。しかし、非自励系(変数係数をもつ系)を対象とするとき、相平面解析は全く無力であると考えられてきた。なぜなら、時間が増加しても不変なベクトル場をもつ自励系の解の挙動は、その射影から十分に考察することができるが、時間経過に伴ってベクトル場が変化する非自励系においては、射影だけでは解の挙動が完全には把握できないからである。即ち、初期値が同じであっても初期時刻が異なれば、解軌跡は全く違った形状になる。そのため、非自励系では、国内外を通じて相平面解析はほとんど行われてこなかった。

例えば、2次元ダイナミカルシステムの安定性理論において、平衡点(または零解)の大域的漸近安定性の研究は古くから重要な位置を占めてきた。特に、方程式 $(L) x'' + a(t)x' + \omega^2 x = 0, \omega > 0$ で記述される速度に比例する抵抗を受ける減衰振動の平衡点が漸近安定になるための条件は、数学的理論面のみならず応用面の要請から、多くの研究がなされてきた。そのパイオニア的研究として、Levinson & Nohel (Arch. Rational Mech. Anal., 1960) の結果を挙げることができる。彼らは減衰係数 $a(t)$ が正の下限 α と上限 β をもつならば、方程式 (L) の平衡点は漸近安定であることを示した。この結果により、その後の研究は下限か上限のどちらかを取り除く方向に進んだ。そして、任意の t に対して

$$(i) \quad 0 < \alpha \leq a(t) < \infty$$

である場合と

$$(ii) \quad 0 < a(t) \leq \beta$$

である場合に区別されて、それぞれ large damping と small damping と呼ばれるようになった。以下では、この研究の歴史的変遷の一端だけ紹介する(研究業績[8]に詳述した)。

(i) large damping の場合において、特筆すべきは Smith (Quart. J. Math. Oxford, 1961) の結果である。彼は方程式 (L) の平衡点が漸近安定になるための必要十分条件は $\int_0^\infty \int_0^t e^{A(s)-A(t)} ds dt = \infty$ であることを導いた(ただし、 $A(t) = \int_0^t a(s) ds$ である)。彼の結果は large damping の場合を対象としているため、減衰係数 $a(t)$ が零になることは許されない。その後、Hatvani & Totik (Diff. Integral Eqns., 1993) は、減衰係数 $a(t)$ が零になる区間幅が π/ω より短ければ、同じく $\int_0^\infty \int_0^t e^{A(s)-A(t)} ds dt = \infty$ が必要十分条件であることを証明し、Smith の結果を拡張した。

一方、(ii) small damping の場合においては、かなり強い前提条件の下では、方程式 (L) の平衡点が漸近安定になるための必要十分条件が報告されていたが、Smith 型のような良い結果はない。ただし、減衰係数 $a(t)$ が weakly integrally positive と呼ばれる関数族に属するならば、方程式 (L) の平衡点は漸近安定であるという優れた結果を Hatvani (Nonlinear Anal., 1995) が与えた。

2. 研究の目的

本研究のメインテーマは、低次元力学系(主に2次元ダイナミカルシステム)に対して、それらの解軌道の漸近的挙動を定性的に考究するために最適な相空間(相平面)解析法を新構築することであった。

2次元や3次元などの低次元ダイナミカルシステムの研究には、無限次元を含む高次元

のそれとは異なった難しさがある。後者の難しさは、1次元において成り立つ事実を拡張し、任意の高次元でも成り立つことを示すことにある。一方、前者の難しさは、ある次元のダイナミカルシステムにおいては成り立たないが、次元を上げると成り立つ事実を明らかにすることにある。この次元の差による変化を探求することは容易ではない。しかし、そうだからこそ、低次元ダイナミカルシステムの研究は学術的な魅力を有していると言える。

3. 研究の方法

本研究組織メンバーは以下の欄に記した4名の連携研究者と海外の研究協力者6名であった。研究代表者と連携研究者(松永、齋藤、山岡、鬼塚)は、各種の研究集会での討論や日頃のメールによる研究連絡を蜜に行った。また、研究代表者は研究協力者(郭、范、呉、Dosly, Rehak, Pituk)から専門知識の提供を受けつつ、本研究課題を着実に進めた。得られた成果は8編の共同論文に纏められ、既に報告されている(雑誌論文の欄を参照)。また、国内外の研究集会に出席し、数多く発表した(学会発表の欄を参照)。

本研究では、数学的理論追求が目的であるため、特別な研究施設・設備等は必要としなかったが、得られた成果が真に価値あるものであるかを検討するため、シミュレーションを行い解軌道図を描いた。その一部は雑誌論文に掲載された。

4. 研究成果

研究代表者を中心として、方程式(L)を一般化した半分線形方程式

$$(H) (\varphi_p(x'))' + a(t)\varphi_p(x') + \varphi_p(x) = 0$$

(ただし、 $\varphi_p(z) = |z|^{p-2}z$, $p > 1$)や準線形方程式及び非線形方程式の平衡点の大域的漸近安定性や一様漸近安定性に関する研究に取り組み、数多くの成果を得てきた。それらの成果は既に国際誌に掲載された(研究業績[1, 2, 4, 5, 8, 10-12, 14])。

その一部を紹介すると、単振子の運動方程式

$$(P) x'' + a(t)x' + \sin x = 0$$

の平衡点が漸近安定になるための必要十分条件を与えた(研究業績[14])。これは上記のHatvani & Totikの結果の拡張になる。また、small dampingの場合において、減衰係数 $a(t)$ がweakly integrally positiveであるならば、方程式(H)の平衡点は漸近安定であることを証明した(研究業績[4])。これはHatvaniの結果の拡張である。減衰係数 $a(t)$ の下限 α と上限 β を同時に取り外してしまうと解析が一段と困難になるのは言うまでもなく、国内外で研究成果はほとんどない。研究代表者はこのデリケートな場合

をfluctuating dampingと名付け、減衰係数 $a(t)$ が一様連続かつweakly integrally positiveである下で、方程式(H)の平衡点は漸近安定になるための必要十分条件を報告した(研究業績[8])。さらに、概周期関数を一般化した関数族を定義し、減衰係数とその関数族に属する場合における方程式(H)の平衡点の漸近安定性について議論した(研究業績[2, 10])。

他の学問領域への応用面を志向した研究成果としては、静水中での小舟の自由横揺れ現象の解析(研究業績[11])と生態系モデルの内部平衡点の安定性問題(研究業績[6, 7, 13])及び極限閉軌道の一意存在性に関する解析(研究業績[9])を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計14件)

[1] J. Sugie, Smith-type criterion for the asymptotic stability of a pendulum with time-dependent damping, Proceedings of American Mathematical Society **141** (2013), 8169-8177. 査読有

<http://www.ams.org/journals/proc/2013-141-07/S0002-9939-2013-11615-1/home.html>

[2] J. Sugie, Y. Saito, Convergence of solutions of nonlinear systems with integrable forcing term and its application to a biological model, Applied Mathematics and Computation **219** (2013), 8169-8177. 査読有

<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.02.023>

[3] S. Hata, J. Sugie, A necessary and sufficient condition for the global asymptotic stability of damped half-linear oscillators, Acta Mathematica Hungarica **138** (2013), 156-172. 査読有

<http://link.springer.com/article/10.1007/s10474-012-0259-7>

[4] J. Sugie, T. Shimadu, T. Yamasaki, Global asymptotic stability for oscillators with superlinear damping, Journal of Dynamics and Differential Equations **24** (2012), 777-802. 査読有

<http://link.springer.com/article/10.1007/s10884-012-9256-3>

[5] J. Sugie, S. Hata, Global asymptotic stability for half-linear differential systems with generalized almost periodic coefficients, Monatshefte für Mathematik **166** (2012), 255-280. 査読有

<http://link.springer.com/article/10.1007/s10884-012-9256-3>

7/s00605-011-0297-1

[6] J. Sugie, Y. Saito, Uniqueness of limit cycles in predator-prey populations with prey immigration, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **72** (2012), 299–316. 査読有

<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/11084008X>

[7] J. Sugie, Global asymptotic stability for damped half-linear oscillators, *Nonlinear Analysis* **74** (2011), 7151–7167. 査読有

<http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2011.07.028>

[8] Y. Saito, J. Sugie, Y.-H. Lee, Global

asymptotic stability for predator-prey models with environmental time-variations, *Applied Mathematics Letters* **24** (2011), 1973–1980. 査読有

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2011.05.015>

[9] J. Sugie, Y. Saito, M. Fan, Global asymptotic stability for predator-prey systems whose prey receives time-variation of the environment, *Proceedings of American Mathematical Society* **139** (2011), 3475–3483. 査読有

<http://www.ams.org/journals/proc/2011-139-10/S0002-9939-2011-11124-9/home.html>

[10] M. Onitsuka, J. Sugie, Uniform global asymptotic stability for half-linear differential systems with time-varying coefficients, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A: Mathematics* **141** (2011), 1083–1101. 査読有

<http://dx.doi.org/10.1017/S0308210510000326>

[11] J. Sugie, Y. Ogami, M. Onitsuka, Asymptotic stability for quasi-linear systems whose linear approximation is not assumed to be uniformly attractive, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **190** (2011), 409–425. 査読有

<http://link.springer.com/article/10.1007/s10231-010-0156-z>

[12] J. Sugie, Three-dimensional time-varying nonlinear systems containing a Hamilton system, *Nonlinear Analysis* **74** (2011), 2296–2308. 査読有

<http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2010.11.034>

[13] J. Sugie, S. Hata, M. Onitsuka, Global attractivity for half-linear differential systems with periodic coeffic-

ients, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **371** (2010), 95–112.

査読有

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.04.035>

[14] J. Sugie, M. Onitsuka, Integral conditions on the uniform asymptotic stability for two-dimensional linear systems with time-varying coefficients, *Proceedings of American Mathematical Society* **138** (2010), 2493–2503. 査読有

<http://www.ams.org/journals/proc/2010-138-07/S0002-9939-10-10274-3/home.html>

[学会発表] (計18件)

[1] 杉江実郎, 矢倉江梨奈, 慣性抵抗の影響を受ける単振子の漸近安定性, 関数方程式の定性的理論ワークショップ (招待講演), 平成25年3月19日, 岡山理科大学25号館5階22553講義室 (岡山)

[2] 山崎貴士, 杉江実郎, 減衰優線形振動子に overdamping 現象が起こるための必要十分条件, 関数方程式の定性的理論ワークショップ, 平成25年3月19日, 岡山理科大学25号館5階22553講義室 (岡山)

[3] 喜良和哉, 河端寛朗, 杉江実郎, 減衰優線形振動子の一樣大域的漸近安定性, 関数方程式の定性的理論ワークショップ, 平成25年3月19日, 岡山理科大学25号館5階22553講義室 (岡山)

[4] 杉江実郎, 水中における振り子の漸近挙動について, 振動理論ワークショップ—松山2013, 平成25年2月11日, 愛媛大学理学部数学棟2階大演習室 (愛媛)

[5] 山崎貴士, 杉江実郎, Global asymptotic stability for damped superlinear oscillators, 平成24年度日本数学会中国・四国支部例会, 平成25年1月27日, 高知大学理学部情報科学棟102番教室 (高知)

[6] 杉江実郎, 山崎貴士, 嶋津恒彦, 減衰優線形振動子の大域的漸近安定性の判定基準, 平成24年度日本数学会秋季総合分科会, 平成24年9月18日, 九州大学伊都キャンパス (福岡)

[7] J. Sugie, Global dynamics of oscillators with superlinear damping, 2012 NENU Mathematical Meeting (招待講演), 平成24年9月3日, 東北師範大学 (中華人民共和国・長春市)

[8] 杉江実郎, 減衰項をもつ半分線形振動子の大域的漸近安定性, 微分方程式の定性的理論ワークショップ, 平成24年3月4日, 島根大学総合理工学部3号館数理第2総合演習室 (松江)

[9] 齋藤保久, 杉江実郎, Global stabilization and regulation in predator-prey mo-

dels, RIMS 研究集会「関数方程式の定性的理論の新展開」, 平成23年11月10日, 京都大学数理解析研究所111号室(京都)

[10] Y. Saito, J. Sugie, Necessary and sufficient conditions for global dynamics of predator-prey models with prey immigration, 2011 KMS Fall Meeting, 平成23年10月21日, 慶北大学校自然科学大学(韓国・大邱広域市)

[11] 畑沙緒里, 杉江実郎, 減衰半分線形振動子の大域的漸近安定性のための必要十分条件, 平成23年度日本数学会秋季総合分科会, 平成23年9月28日, 信州大学全学教育機構第20講義室(長野)

[12] 杉江実郎, 摩擦項をもつ半分線形振動子の大域的漸近安定性, 岐阜大学における微分方程式セミナー, 平成23年9月8日, 岐阜大学工学部100番教室(岐阜)

[13] 山崎貴士, 杉江実郎, Global asymptotic stability for oscillators with superlinear damping terms, 愛知教育大学における微分方程式セミナー, 平成23年9月6日, 愛知教育大学第1共通棟201教室(愛知)

[14] 嶋津恒彦, 杉江実郎, Global asymptotic stability for superlinear damped differential equations, 愛知教育大学における微分方程式セミナー, 平成23年9月6日, 愛知教育大学第1共通棟201教室(愛知)

[15] Y. Saito, J. Sugie, Necessary and sufficient conditions on global stabilizing or regulating effects of prey immigration, The 11th International Workshop on Differential Equations, 平成23年5月2日, 全南大学校自然科学大学(韓国・光州広域市)

[16] Y. Saito, J. Sugie, Necessary and sufficient conditions for global dynamics of a Rosenzweig-MacArthur model with prey immigration, 2011 KMS Spring Meeting, 平成23年4月30日, 高麗大学校自然科学大学(韓国・ソウル特別市)

[17] 加登田麻衣, 杉江実郎, 係数の積が周期関数である3次元線形微分方程式系の漸近安定性, 平成22年度日本数学会中国・四国支部例会, 平成23年1月30日, 鳴門地域地場産業振興センター(徳島)

[18] 畑沙緒里, 杉江実郎, 概周期係数をもつ半分線形微分方程式系の大域的漸近安定性, 微分方程式の定性的理論ワークショップ in 岡山理大, 平成23年1月22日, 岡山理科大学25号館5階22553講義室(岡山)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

杉江 実郎 (SUGIE JITSURO)
島根大学・総合理工学研究科・教授
研究者番号: 40196720

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

松永 秀章 (MATSUNAGA HIDEAKI)
大阪府立大学・工学研究科・准教授
研究者番号: 40332960

齋藤 保久 (SAITO YASUHISA)
島根大学・総合理工学研究科・准教授
研究者番号: 30402241

山岡 直人 (YAMAOKA NAOTO)
大阪府立大学・工学研究科・准教授
研究者番号: 90433789

鬼塚 政一 (ONITSUKA NASAKAZU)
岡山理科大学・理学部・講師
研究者番号: 20548367