

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 31 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010 ～ 2012

課題番号：22540191

研究課題名（和文） 穴あき曲面群の表現空間の大域座標系の応用

研究課題名（英文） Applications of global coordinate systems for the representation spaces of punctured surface groups

研究代表者

中西 敏浩（NAKANISHI TOSHIHIRO）

島根大学・総合理工学研究科・教授

研究者番号：00172354

研究成果の概要（和文）：R. C. Penner によるイデアル弧のラムダ長を用いた穴あき双曲曲面のタイヒミュラー空間の座標系は複素解析、微分幾何学、トポロジーなどの数学の諸分野のみならず物理学などにも応用されている。この座標系を複素化し、穴あき曲面群の $SL(2, C)$ 表現空間に拡張することにより、より幅広い応用が見込まれる。当研究では Penner 座標の一つの複素化を提唱し、それを離散群、双曲 3 次元多様体、写像類群、複素力学系などの理論や数論に応用して、いくつかの結果を得た。

研究成果の概要（英文）：R. C. Penner's lambda length coordinate system for the Teichmüller space of a punctured surface has many applications to complex analysis, differential geometry, topology and to mathematical physics. We introduced a complexification of Penner's coordinates in order to parametrize $SL(2, C)$ representation spaces of punctured surface groups. The complex coordinates are applied to the theories of Kleinian groups, hyperbolic 3-manifolds, mapping class groups, complex dynamics and number theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	800,000	240,000	1040,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：複素解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：タイヒミュラー空間，リーマン面，離散群，写像類群，双曲幾何学

1. 研究開始当初の背景

リーマン面の変形空間であるタイヒミュラー空間は現代数学の基本概念であり、解析学、微分幾何学、位相幾何学、理論物理学など広汎な分野に渡る研究対象になっている。研究代表者である中西 敏浩は複素解析の立場からタイヒミュラー空間の大域座標系やヴェイユ・ピーターソン幾何および写像類群のタイヒミュラー空間への作用について研究を行

ってきた。

タイヒミュラー空間の形状の理解やその上での解析学の展開のためには、座標系を導入する必要がある。タイヒミュラー空間は多様な側面を有するのでこれまで研究目的に合わせた様々な座標系が導入されてきた。研究代表者がとくに注目したのは R. C. Penner によるイデアル弧のラムダ長を用いた穴あき曲面のタイヒミュラー空間の座標で、その

理由は、彼の座標は写像類群の作用を有理変換がなす群によって表現する、飾り付き (decorated) タイヒミュラー空間の自然な胞体分割を導くなどの利点を持つからである。しかし Penner 座標はタイヒミュラー空間の実解析的パラメータであって、複素解析的手法によるタイヒミュラー空間の研究には適さない。このような事情から研究代表者は Helsinki 大学の M. Naatanen 氏と共同で Penner 座標の複素化を研究し一定の成果を得てきた。しかしながら、我々が考案した座標系は多価関数であり、さらに曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間、とくに我々が興味を持つ離散表現のつくる部分空間については現在もまだよくわかっていないため、そのままでは Penner の理論を踏襲することができず、一価な分枝の構成など複素座標の基礎づけと整備に時間を奪われ、さまざまな方面への応用が見込まれることを知りながらも、応用面についての研究は不十分であった。科学研究費補助金、基盤研究 (C) 「リーマン面上の射影構造の研究とその双曲多様体・複素力学系への応用」(研究代表者：中西・浩) の補助による研究期間 (2006 年~2008 年) において基礎的研究をほぼ終えることができたので、研究目標を複素化された Penner 座標をタイヒミュラー空間およびそれを包摂する曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の複素解析的研究と写像類群、双曲 3 次元多様体や数論など他の領域への応用に定めた。

2. 研究の目的

穴あき曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間を研究代表者と M. Naatanen によって導入された大域座標系を用いて研究するのが目的であった。この座標系のもとで写像類群が有理写像として表現できることをフルに利用して、 $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間の離散表現のなす部分空間の位相的構造や、写像類群の力学系、3 次元双曲多様体などにより具体性を伴ったイメージを付与する。さらに数論における不定方程式の整数解や複素連分数近似への我々の座標系の応用を与えることと $SL(2, \mathbb{C})$ の部分群の離散判定法のためのアルゴリズムの開発することを副次的に目指した。

(研究項目) Penner 座標およびその複素化の最大の利点は、写像類群のタイヒミュラー空間や曲面群の表現空間への作用が有理写像による変換群として記述できることであった。その特性を利用すれば次のような課題に座標系を応用することができる。

- (1) 穴あき曲面群の離散的表現のつくる部分空間の決定とその位相的構造の解明
- (2) 円周上の曲面束の構造を持つ双曲的 3 次元多様体の具体例の構成

- (3) 多変数有理写像の複素力学系への応用
- (4) 不定方程式の整数解や複素連分数展開など数論への応用
- (5) 境界群の構成 (境界群は離散群論において興味深い対象であるが、その実例を構成するのは一般に困難である。ここでは極大カスプ群という不連続領域の各成分が円となる群の系列が複素パラメータ空間に占める場を決定することを目標とする。)

これらはいずれも従来の Penner 座標では扱うことができず、複素化した座標によって初めて実行できる我々独自の研究テーマである。

我々の研究においては理論の構築・整備よりも、Penner 座標によって計算可能になるものを利用して、研究対象を「手に取れるように」具現化することに重点を置いた。たとえば、曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の生成系を与える行列の表示や擬アノソフ的写像類の固定点とそれに対応するクライン群の計算、さまざまな境界群を発見することなどがその対象に含まれる。

3. 研究の方法

- (1) 連携研究者との情報交換を行った。国内外の研究集会に参加し、講演を行い、他の参加者と討論や研究内容の検討を行った。
- (2) タイヒミュラー空間の研究に関連する文献を収集し、最新の研究動向を調査した。またグレブナー基底など今後の研究に必要と思われる事項に関連した文献を収集し知識の習得に努めた。
- (3) 写像類の有理写像の表現やその作用に関する不動点を見つけるための代数方程式の解法、曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の生成系の構成、不定方程式の整数解発見などのさまざまな計算に電子計算機と数式処理ソフト (主に Mathematica) を使用した。

4. 研究成果

- (1) 1 点穴あき曲面のタイヒミュラー空間の Penner 座標系を用いた写像類の有理変換表現が正整数係数有理式で分母が単項式になることを証明し、その結果を用いて、無限個の整数解を許容する不定方程式を得て、古典的なマルコフ方程式の整数解の一般化を与えた。さらに以上の結果を複素化した Penner 座標を用いることにより、いくつかの不定方程式の (ある代数体における) 整数解に拡張できることを示した。
- (2) 双曲的穴あきトーラス上の単純閉測地線の長さについての関数項をもつ無限級数について McShane の恒等式の別証明を与えた。我々の証明は、穴あきトーラス群の標準生成

系の語として回文になるもののうちから単純閉測地線に対応するものを選び出し、その軸の配列と無限小 Birman-Series 集合の解析によって生まれたものである。この結果の証明過程において、階数 2 の自由群の生成系を見つけるといふ群論の基本問題を扱っており、最近の Gilman-Keen の結果と関連して興味深い。

(3) 種数 g の m 個の境界成分を持つコンパクトな曲面のタイヒミュラー空間を、曲面内部が許容する完備双曲構造の変形空間と見たとき、タイヒミュラー空間は有限個の閉測地線の長さの組によって大域的に座標づけられる。曲面を一意化するフックス群の言葉で表現すれば、有限個のトレース関数によって座標づけられる。その際、必要な測地線あるいはトレースの個数の最小値は $6g-6+3m$ 個 ($m=0$ の場合は $6g-5$ 個) であることが、すでに P. Schmutz, 奥村善英や Feng Luo 等の結果によって知られている。しかしその後、測地線長関数やトレース関数を実際にタイヒミュラー空間の研究に応用する研究はあまりなされてこなかったようである。我々はトレース関数による座標系を再検討し、 $(g, m)=(1, 2), (2, 0)$ のときにタイヒミュラー空間に大域座標系を与える 7 つのトレース関数の組を与え、さらにこれらの座標によって写像類群の作用が有理変換群の作用として表現できることを証明した。面積有限穴あき曲面については写像類群が有理表現をもつことが Penner によって得られていたが、(種数 2 の場合に限定しているが) 閉曲面についても同様の結果が成り立つことを知ったのは驚きであった。ただしその表現はかなり煩雑であり、応用を考えると、その計算に適した数式処理方法が必要と思われる。グレブナー基底の応用など解決法を見いだされるのではないかと予想する。

(4) 一般の (g, m) 型曲面のタイヒミュラー空間のトレース関数の組による座標付けの研究も行った。たとえば種数が 3 以上の閉曲面のタイヒミュラー空間を座標づける $6g-5$ 個のトレース関数の組とそれらの間に成り立つ関係式を求めることができた。しかし、この結果をタイヒミュラー空間や写像類群の諸問題、たとえば種数が 3 以上の閉曲面についても写像類群の作用を有理変換群で表現するような $6g-5$ 個のトレース関数の組が存在するかといった問題に応用するときには生ずる膨大な計算を克服することができずにおり、(3) と同じくこの問題に適した数式処理の手法の開発が課題として残った。

(5) $SL(2, \mathbb{C})$ の行列に対して成り立つさまざまなトレース恒等式を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① 中村豪, 中西敏浩, Trace parameters for Teichmüller space of genus 2 surfaces and mapping class group, Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 査読あり, Vol.67, 2013, pp.35-44, DOI: 10.2478/v10062-012-0020-2
- ② 中村豪, 中西敏浩, Parametrizations of some Teichmüller spaces by trace functions, Conformal Geometry and Dynamics, 査読あり, Vol. 17, 2013, p.47-57 <http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/ecgd>
- ③ 中村豪, 中西敏浩, Parametrizations of some Teichmüller spaces by trace functions, 数理解析研究所講究録, 査読なし, Vol.1777, 2012, pp.62-74 <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html>
- ④ 中西敏浩, A series associated to generating pairs of a once punctured torus group and a proof of McShane's identity, Hiroshima Mathematical Journal 査読あり, 41 2011, pp.11-25, (Project Euclid の HP 内の Hiroshima Mathematical Journal のサイトから検索可能 projecteuclid.org/hmj)
- ⑤ 中西敏浩, An application of Penner's coordinates of Teichmüller space of puncture surfaces, in Infinite dimensional Teichmüller spaces and moduli spaces, RIMS Kokyuroku, Bessatsu Vol. B17, 査読あり, 2010, pp.105-114, ISSN 1881-6197 <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>

[学会発表] (計 8 件)

- ① 中西敏浩, Parametrization of Teichmüller spaces by trace functions, Workshop on low dimensional conformal structures and their groups, 2012 年 6 月 28 日, University of Gdansk, Poland
- ② 中西敏浩, Parametrization for Teichmüller spaces and its application to a representation of the mapping class groups, Rigidity School, Tokyo 2011/2012, 2012 年 3 月 18 日, 東京大学大学院数理科学研究科 (東京)

- ③ 中西敏浩, Parametrization of Teichmuller spaces by trace functions and its application, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2012年1月9日, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (名古屋)
- ④ 中村豪, 中西敏浩, Trace parameters for Teichmuller spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 2011年9月30日, 信州大学 (長野)
- ⑤ 中西敏浩, Parametrization of Teichmuller spaces by trace functions, リーマン面に関する位相幾何学, 2011年9月5日, 東京大学大学院理学研究科 (東京)
- ⑥ 中西敏浩, Parametrization of Teichmuller spaces by trace functions, XV Ith Conference on Analytic Functions and Related Topics, 2011年6月27日, PWSZ, Poland
- ⑦ 中西敏浩, Parametrization of Teichmuller spaces by trace functions, 群の表現及び表現空間の幾何学的・解析的研究, 2011年6月23日, 京都大学数理解析研究所 (京都)
- ⑧ 中西敏浩, Penner's coordinate-system for a representation space of a punctured surface group and its applications, Geometry, Topology and Dynamics of Character Varieties, 2010年6月20日, National University of Singapore, Singapore

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中西 敏浩 (NAKANISHI TOHIHIRO)
島根大学・総合理工学研究科・教授
研究者番号：00172354

(2) 連携研究者

作間 誠 (SAKUMA MAKOTO)
広島大学・理学研究科・教授
研究者番号：30178602

諸沢 俊介 (MOROSAWA SHUNSUKE)
高知大学・理学部・教授
研究者番号：50220108

宮地 秀樹 (MIYACHI HIDEKI)
大阪大学・理学研究科・准教授
研究者番号：54385480

(3) 研究協力者

中村 豪 (NAKAMURA GOU)
愛知工業大学・工学部・准教授
研究者番号：50319208