

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 31 日現在

機関番号：16301
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540198
 研究課題名（和文）ヘルムホルツ方程式の解の漸近形とその数学的散乱理論への応用に関する研究
 研究課題名（英文）Research on the asymptotic form of the solutions to the Helmholtz equation and the application to mathematical scattering theory
 研究代表者 門脇光輝 (KADOWAKI MITSUTERU)
 愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
 研究者番号：70300548

研究成果の概要（和文）：自由境界 3 次元半空間における弾性波に関するヘルムホルツ方程式の解の研究を行った。特に、空間の無限遠方での漸近形に関する研究を行った。成果として、P モード、R モード、SV モード（反射 P 波成分のみ）、SH モードおよび SV+SV0 モード（反射 P 波成分を除く）に関する漸近形をそれぞれ得た。しかし、SH モードおよび SV+SV0 モードについては、北極方向が除かれた。また、関連する研究テーマである摩擦項を持つ波動方程式の散乱および逆散乱問題、非線形シュレディンガー方程式の逆散乱問題、一階偏微分方程式系の解の界面正則性についての成果も得た。

研究成果の概要（英文）：We studied the solutions to the Helmholtz equation with respect to elastic wave in 3-dimensional half space with free boundary. Especially, we studied the asymptotic forms of infinite direction of space. As the results, we obtained the asymptotic forms concerning P mode, R mode, SV mode (the reflected P wave component only), SH mode and SV+SV0 mode (except for the reflected P wave component), respectively. But, for the asymptotic forms concerning SH mode and SV+SV0 mode, the direction of North pole was excepted. We also obtained the results concerning scattering and inverse scattering problem for wave equations with dissipative terms, inverse problem for nonlinear Schrödinger equations and the regularity (at interface) of the solutions to a system of first order partial differential equation as the related topics.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：半空間弾性波、P 波と S 波、レイリー波、ヘルムホルツ方程式、定常位相の方法

1. 研究開始当初の背景

原子などの散乱体に向けて電子などの平面波を入射したときの反射波（球面波）の様子を研究する物理的散乱理論では、この様子を

記述するシュレディンガー方程式や波動方程式から時間変数を分離することによって得られる空間変数のみの方程式（ヘルムホルツ方程式）の解の空間遠方での漸近形を考察

することがある。具体的には解が入射波(平面波)と反射波(球面波)の重ね合わせで表現できるとして扱われる。特に、この反射波の係数(振幅)が散乱振幅と呼ばれる量で、散乱体の情報を引き出す重要な量となっている(以下、これを物理的散乱振幅と記す)。漸近形を用いた考察方法は、逆問題やそのための数値計算にも適用できる可能性がある。一方、物理的散乱理論の数学的定式化である数学的散乱理論ではヘルムホルツ方程式の代わりに、スペクトル分解定理に基づいて生成作用素のリゾルベントを中心に扱う方法が主流であった。リゾルベントを中心に用いた方法は完成された散乱理論を構築した(この方法の延長でも散乱振幅は定義される)。しかし、空間遠方の漸近形を捉えるのはやや困難な方法であった。その中で、Yafaev(1991)は2体シュレディンガー方程式に対するヘルムホルツ方程式の解の漸近形を、リゾルベントを用いた解析により示した。そして、この漸近形はヘルムホルツ方程式の解の必要十分条件を与え、固有作用素展開定理(固有関数展開の一般化)も示した。そしてIsozaki(2001)は、3体シュレディンガー方程式に対してYafaevと同様の結果を得ている。さらにYafaevとIsozakiは、ヘルムホルツ方程式の解を、平面波と球面波の重ね合わせで表現して、物理的散乱振幅も得ている。

2. 研究の目的

ヘルムホルツ方程式の解の空間遠方での漸近形を用いた散乱理論の研究が十分ではない方程式は少なくない。本研究では、このような方程式の例である次の①~③:

- ① 摂動された自由境界3次元半空間における等方弾性方程式
- ② 摂動された三層媒質における音響波動方程式
- ③ 吸収効果を伴うシュレディンガー方程式

のヘルムホルツ方程式の解に対して上記YafaevとIsozakiにおける漸近形を導き、それに基づいた個々の散乱理論の構築、具体的には物理的散乱振幅の導出と固有関数展開定理を目指す。

3. 研究の方法

YafaevとIsozakiのアイデアに沿った次の(1)~(3)の順で研究を進める:

(1) 非摂動系(散乱体がない場合)の方程式に対するヘルムホルツ方程式の解とレゾルベントの漸近形の解析を行う。具体的には、ヘルムホルツ方程式の解が(一般化された)フーリエ変換を用いて記述できることに注意して、このフーリエ変換に定常位相の方法を適用することでヘルムホルツ方程式の解

の漸近形を導く。その際、固有関数系・フーリエ変換が持つ特性(特異性)に合わせて定常位相の方法を適宜改良する。そして、レゾルベントがヘルムホルツ方の解で記述できることを用いてレゾルベントの漸近形を導く。なお、上記①の研究ではDermenjian-Guillot(1988)の固有関数展開定理を、②ではWilcox(1984)の固有関数展開定理をそれぞれ用いる。③については、この段階における結果が既にある。

(2) 摂動系(散乱体がある場合)の方程式に対するレゾルベントとヘルムホルツ方程式の解の漸近形の解析を行う。具体的にはレゾルベント方程式と(1)で得た結果を用いて、摂動系のレゾルベントの漸近形を記述する。次に、ヘルムホルツ方程式の解がレゾルベントで記述できることを用いて、ヘルムホルツ方程式の解の漸近形を導く。

(3) 固有関数展開定理と物理的散乱振幅の証明・導出を行う。具体的には(2)で得た摂動系のヘルムホルツ方程式の解の漸近形から摂動系のフーリエ変換を決定する。そして、このフーリエ変換で固有関数展開定理が記述できることを示す。最後に、摂動系のヘルムホルツ方程式の解の漸近形を、入射波と球面波の重ね合わせで表現して、物理的散乱振幅を導出する。

4. 研究成果

(1) 自由境界3次元半空間における等方弾性波に関する固有関数・モードは、境界における入射波から構成されるPモード:入射P波(縦波)+反射P波+反射S波(横波)、SVモード:入射S波+反射S波+反射P波、SV0モード:入射S波+反射S波+反射表面波(P波)、SHモード:入射S波+反射S波とRモード(境界の表面を主に伝播する2次元波、レイリー波と呼ばれる)からなる。そしてヘルムホルツ方程式の解(スペクトル密度関数)はこれらに関する3次元半球面上の積分と円上の積分の重ね合わせによって記述される。これらの中でPモードとSVモードの反射P波の全方向に関する漸近形を得た。また、SHモード、SV+SV0モードの入射S波、反射S波については北極近傍の方向を除いた漸近形を得ることもできた。

証明は定常位相の方法でなされたが、評価対象の積分が半球面上のものであるということに加え、Pモードの反射S波とSVモードの反射P波が屈折波的反射波であることを反映した特異性により、既存の定常位相の方法では証明が困難であった。しかし、Copson(1965)とLewis(1967)のアイデアを盛り込んだ定常位相の方法を考案して、その適用で評価を得た。Rモードについては、円上の積分で記述できるため、通常の定常位相の方法によってその漸近形が得られた(以上に

については学会発表⑤, ⑦, ⑨, ⑪, ⑫, ⑬, ⑮で成果発表を行った)。

なお、SV0 モードの反射表面波については未証明であるが、R モードとの類似点が多いことから同様な方法による証明を試みる計画である。

SH モード、SV+SV0 モードの北極近傍の方向に関して、その評価のために上記とは別バージョンの定常位相の方法を考案した。これも Copson のアイデアを盛り込んだものであるが、S 波の特徴である波面の法線方向と変位の方向が垂直となることから発生する特異性に留意した構成となっている。今後は、この方法の適用による評価を試みる計画である。

(2) 自由境界 3次元半空間における弾性波に対するレゾルベントの剰余項について、その空間遠方における評価がレゾルベントの主部(球面波部分)よりも速く減衰する旨の評価を得た。

以上のことから「研究目的」①の自由境界 3次元半空間における等方弾性波に対しては「研究の方法」で述べた(1)の段階に到達する目処が立ちつつある。しかし、(2)と(3)の研究については、期間内での達成はならなかった。これらについては今後の研究で解決したい。また、研究目的の方程式②と③についても具体的な研究に至らなかったため、これらについても引き続き課題としたい。

関連する成果として以下も得た：

(3) 2つの平面に挟まれた帯状無限領域において摩擦項を持つ波動方程式に対する散乱解の存在を示した(発表論文③, 学会発表⑰)

(4) 2次元空間における摩擦項付き波動方程式に対する逆散乱問題として、摩擦項を散乱振幅から一意的に構成できることを証明した。また、再構成の手続きも与えた(発表論文②, 学会発表⑱)。

(5) 摩擦項を持つ波動方程式やポテンシャル項を持つシュレディンガー方程式の定常問題のレゾルベント評価を行い、その応用として、摩擦項を持つ波動方程式に対する極限振幅の原理の既存の結果の改良や2次元外部領域におけるシュレディンガー方程式に対する平滑化効果を証明した(学会発表①, ③, ⑥, ⑧, ⑩)。

(6) 一般次元の一階偏微分方程式系の解の界面正則性についての解析を行った(発表論文①, 学会発表④, ⑭, ⑱)。

(7) シュレディンガー方程式の非線形項を、散乱解の高振動解析を行うことで、任意の大きさの散乱データから完全に同定した(学会発表②)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① M. Kanou, T. Sato and K. Watanabe, Interface regularity of the solutions for the rotation free and the divergence free systems in Euclidian space, Tokyo Journal of Mathematics(掲載決定), 査読有

② M. Watanabe, Inverse Scattering for the Stationary Wave equation with a Friction Term in Two Dimensions, Publications of Research Institute for Mathematical Sciences, 査読有, Vol. 49, No. 1, 2013, pp.155 - 176

③ M. Kadowaki, H. Nakazawa and K. Watanabe, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media, Electron. J. Diff. Equ. 査読有, Vol. 2011, No. 65, 2011, pp. 1-18

[学会発表] (計18件)

① 中澤 秀夫, Uniform resolvent estimates for stationary Schrödinger Equations in a two-dimensional exterior domain and their applications, The 5th Nagoya Workshop on Differential Equations, 2013年3月12日, 名古屋大学

② Michiyuki Watanabe, Inverse scattering at fixed amplitude for nonlinear Schrödinger equations, TAIWAN-JAPAN joint Conference on PDE and Analysis, 2012年12月26日, National Taiwan University, Taiwan

③ Hideo Nakazawa, On the wave equation with dissipations, TAIWAN-JAPAN joint Conference on PDE and Analysis, 2012年12月26日, National Taiwan University, Taiwan

④ 渡邊 一雄, 一般次元における偏微分方程式系の解の界面正則性, 研究集会「拡散と移流の数理」, 2012年12月1日, 愛媛大学城北キャンパス

⑤ 門脇 光輝, レイリー波に対するグリーン関数について, 夏の作用素論シンポジウム2012, 2012年9月10日, 新潟大学南キャンパス「ときめいと」

⑥ Hideo, Nakazawa, Uniform resolvent estimates for Helmholtz equation in an

- exterior domain and their application to scattering problems, AIMS conference (The 9th AIMS Conference Equations and applications), 2012年7月3日, Orlando, Florida, USA
- ⑦ 門脇 光輝, 3次元半空間の波動伝播と定常位相の方法について, 学習院スペクトル理論セミナー, 2012年5月12日, 学習院大学
 - ⑧ 中澤 秀夫, 摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理の原理, 第27回松山キャンプ, 2012年1月5日, 山口大学吉田キャンパス
 - ⑨ 門脇 光輝, 3次元半空間の波動伝播と定常位相の方法について, 浜松偏微分方程式セミナー, 2011年11月26日, 静岡大学浜松キャンパス
 - ⑩ 中澤 秀夫, ヘルムホルツ方程式の外部問題に対する一様リゾルベント評価とその散乱問題への応用, 第85回熊本大学応用解析セミナー, 2011年11月19日, 熊本大学黒髪キャンパス
 - ⑪ 門脇 光輝, 3次元半空間の波動伝播と定常位相の方法について, 仙台偏微分方程式大学研究集会, 2011年10月10日, 東北大学青葉山キャンパス
 - ⑫ 渡邊 道之, Uniform asymptotic expansions of integrals over a sphere, 仙台偏微分方程式研究集会, 2011年10月10日, 東北大学青葉山キャンパス
 - ⑬ 渡邊 道之, 半無限弾性媒質のS波の漸近挙動について, 三大学偏微分方程式セミナー, 2011年6月22日, 中央大学後楽園キャンパス
 - ⑭ 渡邊 一雄, 発散又は渦度零の解の界面正則性, 第96回神楽坂解析セミナー, 2011年5月28日, 東京理科大学神楽坂キャンパス
 - ⑮ 門脇 光輝, 3次元半空間の波動伝播と定常位相の方法について, 広島数理解析セミナー, 2011年5月27日, 広島大学西条キャンパス
 - ⑯ 渡邊 道之, Inverse scattering problem for stationary wave equation with a friction term in two dimensions, 青葉山研究会(第6回)「逆問題と逆散乱問題」, 2010年12月8日, 東北大学青葉山キャンパス
 - ⑰ Hideo Nakazawa, Several topics on wave equations with dissipation, Operator Theory and Mathematical Physics, 2010年8月9日, Bedlow, Poland
 - ⑱ Kazuo Watanabe, Interface regularity of the solutions for the divergence or rotation free system, Operator Theory and Mathematical Physics, 2010年8月9日, Bedlow, Poland

6. 研究組織

(1) 研究代表者

門脇 光輝 (KADOWAKI MITSUTERU)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 70300548

(2) 研究分担者

中澤 秀夫 (NAKAZAWA HIDEO)
日本医科大学・医学部・教授
研究者番号: 80383371

渡邊 一雄 (WATANABE KAZUO)
学習院大学・理学部・助教
研究者番号: 90260851

渡邊 道之 (WATANABE MICHIIYUKI)
新潟大学・人文社会教育科学系・准教授
研究者番号: 90374181

(3) 連携研究者

なし