2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成２７年　９月２８日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2010～2014
課題番号：２２５４０１９９
研究課題名（和文）有限型擬凸領域における複素解析の研究

研究課題名（英文）Studies on complex analysis for pseudoconvex domains of finite type

研究代表者
神本　丈（Kamimoto, Joe）

九州大学・数理（科）学研究科（研究院）・准教授

研究者番号：９０３０１３７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：多変数複素解析学において非常に重要な正則関数の境界挙動に関して、詳細な研究を行った。特に、私が興味を持ったのは、有限型という重要なクラスの領域に関するもので、このクラスの研究には、特異点論などで重要なニュートン多面体の幾何学的な性質を研究することに帰着される場合が多く、非常に面白い現象を見た。また、これらの研究と深く関連した、調和解析学で重要な振動積分と局所ゼータ関数に関する漸近解析も行った。

研究成果の概要（英文）：In the study of several complex variables, it is very important to understand the boundary behavior of holomorphic functions. I precisely studied this subject. In particular, I am interested in the case when the domain satisfies the finite type condition. In this investigation, the concept of Newton polyhedra, which is important in the study of singularity theory, reflects these investigations. On the other hands, I also study the asymptotic analysis of oscillatory integrals and local zeta functions, which are closely related to the above mentioned studies.

研究分野：多変数複素解析、　調和解析

キーワード：有限型擬凸領域　正則関数　境界挙動　ピーク関数　ベルグマン核　振動積分　局所ゼータ関数　ニュートン多面体

１．研究開始当初の背景

(1) 特異点論的な視点が重要となる研究の対象は，境界のレビ形式が退化している場合，すなわち弱擬凸領域の場合である．強擬凸領域は，局所的に「狭義凸」な領域と双正則同値であり，その上の正則関数の境界挙動は詳しく解析される．ところが，「強」擬凸性の仮定をはずしたとき，Kohn-Nirenberg の具体的な領域が示すように，「擬凸性」と「凸性」という二つの概念は，本質的に違うものである．現在までのところ，「擬凸」とはどのような形状を表すものか，という問いに対しては，十分な答えが得られていない．本研究は，特異点論的な視点から，擬凸の形状を明確にすることを目的としており，多変数複素解析学の本質的に重要な部分に焦点を当てるものであった．さらに，「凸性」の欠如は，その上での正則関数の境界挙動に関する研究を，困難極めるものにしており，どのように解析するかを重要な課題としていた．本研究では，さらに退化の仕方に制限をもうけて，有限型（of finite type）というクラスを対象にした.

２．研究の目的

私の研究で考えた具体的な問題は以下の通りである.

(a) 正則 Peak 関数の構成.
(b) ベルグマン核とセゲー核の特異性の定量的な解析.
(c) ベルグマン核とセゲー核の境界上の滑らかさに関する解析.
(d) 様々な不変計量（ベルグマン計量，小林計量，カラテオドリー計量，ケーラー・アインシュタイン計量等）の境界挙動に関する定量的な評価.
(e) 上の積分核と計量に関する特異性の局所化.
(f) ディーバー-ノイマン問題における劣楕円評価指数の定量的な決定.

強擬凸な場合においては，既にすべての問題が詳細に調べられている.
弱擬凸の場合について，現在までに得られてきた研究の成果を振り返る．2 次元の場合には，退化した集合が簡単な形をしているため解析しやすく，多くの強い結果が得られている．しかし，次元が高い場合には，一般に弱擬凸な点の集合は非常に複雑な形状をしており，解析が困難である．D'Angelo と Catlin は，弱擬凸な点に対して自然数の組による不変量を定義し，ディーバー-ノイマン問題に応用している．それらの不変量が非常に有効となる場合は，準斉次な多項式で近似されるような擬凸領域の場合であり（セミレギュラーと呼ばれる），その場合には，退化の様子がきれいな葉層構造で表される.
この葉層構造を利用して，例えば scaling method を用いることにより，上にあるいくつかの問題は，非常にきれいな形で解決される．しかし，より一般の場合には，退化の構造がよく解らないため，現在までのところ解析の手掛かりがほとんど見つかっていない．実際に，Diederich と Herbort は，ベルグマン核の境界挙動を解析するためには，上の不変量では不十分であることを具体的な領域を用いて示している．より本質的な境界の幾何学的な情報が必要となるわけであるが，現在までのところ，それらがどのようなものであるかは知られていない．ところで，振動積分の漸近展開に関する問題において，相関数の退化した場合について，Vassiliev や Varchenko らは，非常に大きな成果を上げている．実際，彼らは，相関数のテーラー展開に対応する「ニュートン図形」の定量的な情報を用いて，振動積分の挙動を正確に評価している．Phong-Stein も，実解析の分野に対して同様な興味深い結果を与えている．私は，これらの研究に触発されて，ある特別な場合ではあるが，ベルグマン核とセゲー核の境界挙動に関して，領域の定義関数により決まるニュートン図形を用いて詳しい結果を得た．ただし，このニュートン図形は，上で述べた不変量よりも詳しい情報を持つものであるが，まだ特別な場合にしか適用されていない.
　上の問題と関連して，次の問題も考えた．これらについても，退化した場合に関しては，十分な成果が得られていなかった.

(g) 複素多様体上の正則直線束の冪空間に関するベルグマン関数の漸近展開.
(h) ベルグマン計量に関する L^2-コホモロジーの消滅定理.
(i) 退化楕円型作用素（及び接コーシー・リーマン作用素）の実解析的準楕円性に関するトレーブ予想の解決.

３．研究の方法

(1) ニュートン図形の構成．　多重劣調和関数 P(z) をテイラー展開し，その係数が消えていない冪の集合 S を考える．冪に関する空間において，S の凸包の境界面を，P(z) のニュートン図形と呼ぶ．P(z)のテイラー展開において，ニュートン図形に含まれる冪に関する和だけを選んでできる多項式を $P_0(z)$ とする．このとき，$P(z)=P_0(z)+$（剰余項）という形に書くことができる．ここで，$P_0(z)$ は P(z)の本質的な情報を持っているかが問題であるが，一般には，座標変換に依存してその情報が大きく変わる．私は，適切な座標変換を行うことにより，よい $P_0(z)$を構成することを試みた．「よい」の意味は，考える問題に依存するものであるが，今の段階では，ニュートン図形の各面から作られる多項式が，ある意味で狭義多重劣調和となっているようなものを考えている.

(2) 正則 peak 関数の構成．　境界点 p に対して，p でその大きさが最大値を取るような，

正則で境界まで込めて連続な関数を（p における）正則 peak 関数という．この関数の構成に関しては，二つの有効な方法が知られている．ひとつは，ブローアップを用い射影空間上におけるレビ問題に帰着させるもの (Bedford-Fornaess)，もうひとつは，Hoermander の L^2-理論を使ったもの (Fornaess-Sibony) である． 上で作った P_0(z)を用いて Re(w)+P_0(z)<0 で定義される領域をモデルとして，まずこのモデル領域について考えた．二つの方法により構成される場合は，P_0(z)が原点で極小をとる場合と準斉次性を持つ場合（セミレギュラーな場合）であり，現在までのところそれ以外の場合には成果が得られていない．セミレギュラーでない場合こそが特異点論的に面白い場合であるが，第一の方法を応用するためには，さらに何回もブローアップをする必要があるように思われる．その際，より複雑な複素多様体が現れ，その上でレビ問題を解かなければならない．私は九州産業大学の野瀬敏洋氏と共同で，具体的な領域に関して，実験的な試みを行った．次に，一般の領域の場合を考える際は，モデル領域を摂動するわけであるが，モデルを外からよい形をした領域で包み込むことが必要となる．即ち，bumping 関数を構成しなければならないが，この問題はそれ自体興味深いものである．最近，セミレギュラーでない場合に関する部分的な結果が得られているので，ニュートン図形を用いて，この結果を一般化することを試みた．

(3) ベルグマン核の境界挙動． これは，セゲー核の場合と併せて本研究の最も興味深いテーマである．ベルグマン核の境界挙動は正則 peak 関数の構成と深く関連しているが，より詳細な解析が必要となる．セミレギュラーの場合には，すでに詳しい結果が得られているが，漸近展開はまだ得られていないので，その計算を試みた．セミレギュラーでない場合は，まずモデル領域の場合から解析を行った．現在までのところ回転に関して不変な場合のみを扱っているが，それ以外の場合をいくつか条件をつけて解析した．最近，Bo-Yong Chen 氏と Hanjin Lee 氏は，複素特異指数（complex singular exponent）を用いて，あるクラスの領域に関するベルグマン核の境界挙動を正確に評価した．この研究は，ニュートン図形を使った我々の研究と非常に深い関係にあり，特異点論的視点がこの分野において決定的に重要であることを示すものである．ニュートン図形の観点から，彼らの結果をさらに一般化することを試みた．

(4) 正則直線束上のベルグマン関数． コンパクト複素多様体上の正則直線束の冪を高くしたときに，その正則切断の性質を漸近的に調べることは，複素幾何において非常に重要な問題である．特に，ベルグマン関数の冪に関する漸近展開は，最近様々な形で応用されている．曲率が正値の場合は，強擬凸領域の場合に対応しており，C.Fefferman や Boutet de Monvel-Sjoestrand らによるベルグマン核の漸近展開から，非常に精密な結果が得られている．しかし，曲率が半正定値の場合には，まだほとんど研究がなされていない．この場合は，弱擬凸領域のベルグマン核の研究と密接に関連しており，上で述べた研究を利用すれば，詳しい結果が得られると考えられる．この研究では，局所化のためにディーバー方程式をあるクラスの複素多様体の上で評価つきで解くことが必要となるが，それ自体も非常に面白い問題である．このテーマついては，分担者の趙康治氏と野瀬敏洋氏と共同研究を進めた．

４．研究成果

上で述べた複素解析の問題に関しては、非常に詳しい状況が理解されてきており、その成果は、現在いくつかの論文にまとめているところである．

さらに、これらの研究と関連して、調和解析学で非常に重要である振動積分と局所ゼータ関数の漸近解析に関する研究が、非常に有意義な成果をあげた．特に，振動積分の場合で言えば，相関数が実解析的という仮定をはずした場合に関する研究は著しい結果を得ている．この研究では，ニュートン多面体の扱い方が非常に難しくなるが，これらをどのように処理するかと言う問題関して，非常に強い結果を得た．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8　件）

*(with Toshihiro Nose)
On meromorphic continuation of local zeta functions,
To appear in Proceedings of KSCV10.
（査読あり）

*(with Toshihiro Nose)
Newton polyhedra and weighted oscillatory integrals with smooth phases,
To appear in Transactions Amer. Math. Soc.
（査読あり）

＊「多変数関数論における解析接続」数理科学 2014 年 10 月号,
52--57.　（査読なし）

*(with Toshihiro Nose)
Toric resolution of singularities in a certain C^{\infty} functions
and asymptotic analysis of oscillatory integrals and local zeta functions.
Preprint. arXiv:1208.3924.
（査読なし）

*(with Toshihiro Nose)
Oscillatory integrals with some C^\infty phases,
RIMS Kokyuroku Bessatsu B40
(2013), 31--40.
（査読あり）

*(with Toshihiro Nose)
Asymptotic analysis of weighted oscillatory integrals via Newton polyhedra, K. Matsuzaki and T. Sugawa (eds.), Proceedings of the 19th ICFIDCAA Hiroshima 2011, Tohoku University Press, Sendai (2013), 3--12.
（査読あり）

* (with Koji Cho and Toshihiro Nose)
Asymptotic analysis of oscillatory integrals via the Newton polyhedra
of the phase and the amplitude.
Journal of the Mathematical Society of Japan, 65 (2013), 521--562.
（査読あり）

* (with Koji Cho and Toshihiro Nose)
Asymptotics of the Bergman function for semipositive holomorphic line bundles.
Kyushu Journal of Mathematics, (2011), 349-382.
（査読あり）

〔学会発表〕（計　10　件）

ニュートン多面体と振動積分の漸近解析 I,
研究集会「ファイバー束とポテンシャル論」
京大数理解析研究所
2011 年 9 月.

Asymptotic analysis of oscillatory integrals via
the Newton polyhedra of the phase and the amplitude,
調和解析研究集会，奈良，2011 年 11 月.

Newton polyhedra and oscillatory integrals,
研究集会「漸近解析に於ける超局所解析の展望」
京大数理解析研　2011 年 11 月.

Newton polyhedra and oscillatory integrals,
国際研究集会「有限次元無限次元複素解析」，広島，
2011 年 12 月.

On oscillatory integrals with smooth phases,
``Geometric Complex Analysis Tokyo 2012''
東京大学，2012 年 7 月.

ニュートン多面体とベルグマン核の漸近解析,
第 55 回函数論シンポジウム，金沢大学サテライト・プラザ,
2012 年 11 月.

Newton polyhedra and oscillatory integrals,
HMAセミナー・冬の研究会，広島大学
2013 年 1 月.

Newton polyhedra and oscillatory integrals,
代数・幾何・解析セミナー，鹿児島大学,
2014 年 2 月.

Resolution of singularities via Newton polyhedra and its application to analysi
複素解析幾何セミナー，東京大学,
2014 年 5 月.

On local zeta functions in two dimensions,
研究集会「超局所解析の諸相」
京大数理解析研
2014 年 10 月.

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０　件）

国内外の別：

○取得状況（計　０　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1) 研究代表者
神本　丈（KAMIMOTO, Joe）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：９０３０１３７４

(2) 研究協力者
野瀬　敏洋（NOSE, Toshihiro）
九州産業大学・工学部・特認講師
研究者番号：９０６３７９９３