

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540200

研究課題名(和文)走化性方程式の爆発解の構造に関する研究

研究課題名(英文)On the structure of blowup solutions to chemotaxis systems

研究代表者

仙葉 隆 (Senba, Takasi)

九州工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30196985

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本補助金の交付中において、走化性方程式の解の性質についての研究を行ってきた。特に、典型的な爆発解の安定性と定常解の安定性について考察を行った。

最初、後方自己相似解の性質について研究を行った。後方自己相似解は典型的な爆発解の一つである。我々は、その解がある種の安定性を持つことを明らかにした。後方自己相似解は豊富に存在するものではないが、我々の研究によって同様の性質を持つ爆発解が豊富にあることが明らかになった。

次に、定常解の安定性について考察を行った。2次元領域における安定性はすでに知られていたが、我々は高次元領域の場合に安定性を示した。これを用いて振動解や無限次元爆発解を構成した。

研究成果の概要(英文)：From 2010 to 2014, we consider properties of solutions to chemotaxis system. In particular, we consider stability of backward self-similar solutions and stationary solutions.

First, we consider properties of backward self-similar solutions. The backward self-similar solutions are one of typical blowup solutions. We showed some stability of the solutions. The solutions are not so many. However, it became clear by our research that many solutions have similar properties to the backward self-similar solutions.

Next, we consider stability of stationary solutions to chemotaxis system. It was well known that radial stationary solutions are stable in two dimensional case. We showed that radial stationary solutions are stable also in high dimensional cases. Moreover, by using stability, we construct oscillatory solutions and infinite time blowup solutions.

研究分野：関数方程式論

キーワード：走化性方程式 後方自己相似解 定常解 安定性

1. 研究開始当初の背景

Keller と Segel [KS] (以下、[KS]等は本報告書 1 研究開始当初の背景末尾の参考文献を表す。) によって、細胞性粘菌の集中現象を記述するモデル方程式が導出された。その方程式系は 4 つの未知関数で記述された 2 次元空間上の反応拡散方程式系である。それら未知関数は、時空間上の各点における粘菌の密度とその集中現象に関係する化学物質の濃度に対応している。その後 Nanjundiah、Jäger と Luckhaus、永井[N]らにより単純されたモデル方程式の研究がなされ、永井により空間次元が 2 以上のとき球対称な爆発解の存在が示された。以後、単純化されたモデル方程式の中で 2 つの未知関数で記述された放物型 - 楕円型方程式系を走化性方程式と呼ぶ。

永井[N]の研究以降、国内外で走化性方程式の爆発解の研究がなされている。その中で本研究に関連する研究は、空間 2 次元の場合における球対称な Type II 爆発解の構成、空間次元 3 次元以上 9 次元以下の場合における走化性方程式の球対称な Type I 並びに Type II 爆発解の存在[HMV, BCKSV]がある。また、これらの中のいくつかの研究結果は、数値解析や形式的な議論を用いて得られたものであり数学の研究としては再考の必要があると考え。ここで、自己相似変換によって不変な爆発解 (以後、自己相似解とよぶ) 並びにそれと同じ速さで最大値が発散する解を Type I 爆発解と呼び、Type I 爆発解よりも速い速度で最大値が発散する爆発解を Type II の爆発解と呼ぶ。これを踏まえ、応募者、空間次元が 3 以上のとき自己相似解が存在する事を示した。特に 3 次元以上 9 次元以下のとき、無限個の球対称な自己相似解がある事を示した。さらに、応募者と溝口は、空間 11 次元以上のとき球対称な Type II 爆発解を無限個構成した。

以上のように爆発解の構成については満足のいく研究成果が出ているが、爆発解全体についての考察が不十分である。

2. 研究の目的

1 の背景で述べた研究成果を踏まえ、走化性方程式の球対称な爆発解の挙動を Type I 爆発、Type II 爆発と言う切り口で研究し、その構造を明らかにする事が本研究の目的である。

特に高次元領域における爆発解の速さや定常解の性質について調べることにより 2 次元領域における解の性質の違いと共通点を明らかにする事を目的とした。

また、爆発しない解の挙動を明らかにすることも目的とした。

さらに、爆発解や定常解の性質については藤田型非線形熱方程式等の他の方程式についても研究[BHK, M, T]があるが、方程式を超えた解の性質についての考察は少ないと考えており本研究成果と他の方程式に応用

する。または他の方程式の手法を本研究に応用する事により方程式間の解の性質の相違点・共通点を明らかにすることも本研究の目的としたい。

3. 研究の方法

高次元領域には後方自己相似解が存在するが 2 次元領域には同種の解は存在しない。本研究では後方自己相似解の性質を調べるにより 2 次元領域の解の性質の違いを明らかにする事を計画した。

また、2 次元と高次元において定常解は同種の層構造を持つことが知られている。これを用いることにより安定性を示す事を計画した。特に、安定性の研究においては藤田型非線形熱方程式の研究成果や研究方法を再考し本研究に応用する事を考えている。

4. 研究成果

高次元領域における爆発解は初期値が単調減少であれば後方自己相似と同じ速さで爆発することを明らかにした。この事は、領域が全空間の場合、並びに有界な球の場合について明らかにした。後方自己相似解が全空間の場合にしか存在しない解であり、その回の性質が有界領域における爆発解についてもいえたことは爆発が空間局所的であり、全空間以外の場合の爆発解についても後方自己相似解は典型的な爆発解であることを明らかにしたと考えている。

また、2 次元領域の定常解の安定性はすでに知られていたが、定常解の総構造を用いることにより高次元領域における定常解の安定性を明らかにした。また、安定性を用いて振動解や無限時刻爆発解を構成することに成功した。この研究は、藤田型非線形熱法的式使われている手法を本研究に応用できたことによって成功した研究であり、藤田型非線形熱方程式と走化性方程式の解の性質の共通点を見出した成果でもあると考えている。

<引用文献>

[BCKSV] M.P. Brenner, P. Constantin, L.P. Kadanoff, A. Schenkel, S.C. Venkataramani, *Nonlinearity* (1999).

[BHK] J.B. Berg, J. Hulshof, J. King, *SIAM J. Appl. Math.* (2003).

[HMV] M.A. Herrero, E. Medina, and J.J.L. Velázquez, *J. Com. Appl. Math.* (1998).

[HV] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, *Math. Ann.* (1996).

[KS] E.F. Keller and L.A. Segel, *J. Theor. Biol.* (1970).

[M] N. Mizoguchi, *Adv. Differential Equations* (2004).

[N] T. Nagai, *Adv. Math. Sci. Appl.* (1995).

[T] W.C. Troy, *SIAM J. Math. Anal.* (1987).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Y. Naito and T. Senba, Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system in two dimensional, *Communications on Pure Applied Analysis* 12 (2013), 1861—1880, 査読有.

Y. Naito and T. Senba, Blow-up behavior of solutions to a parabolic-elliptic system on higher dimensional domains, *Discrete and Continuous Dynamical System - A*, 32(10) (2012) 3691-3713, 査読有.

Y. Giga, N. Mizoguchi and T. Senba, Asymptotic behavior of type I blowup solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 201 (2011), no. 2, 549—573, 査読有.

N. Mizoguchi and T. Senba, A sufficient condition for type I blowup in a parabolic-elliptic system, *J. Differential Equations*, 250 (2011) 182-203, 査読有.

[学会発表](計 10 件)

T. Senba, On the behavior of solutions to a system of partial differential equations related to biology, The 22nd International Conference of FIM on Interdisciplinary Mathematics, Statistics and Computational Techniques (FIM 2013), 北九州国際会議場, 北九州市 (日本), 2013年11月10日-12日 (講演: 11日).

T. Senba, 走化性方程式の解の挙動について (On the behavior of radial solutions to a parabolic-elliptic system related to chemotaxis), 非平衡現象の解析における発展方程式理論の新展開 (New developments of the theory of evolution equations in the analysis of non-equilibria), 京都大学数理解析研究所, 京都 (日本), 2012年10月9日~11日 (講演: 11日).

T. Senba, Oscillating solutions to a simplified chemotaxis system in high dimensional spaces, 5th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, Centre International de Rencontres Mathématiques, Luminy, Marseille, France, 2012/09/10-14. (Talk 2012/09/10).

仙葉 隆, 溝口紀子、平面上の Keller-Segel 系の爆発の速さと漸近形について、日本数学会 2012 年度年会、東京理科大学 神楽坂キャンパス、東京都新宿区、2012 年 3 月 26 日~3 月 29 日 (講演日 28 日)。

仙葉 隆, 高次元領域における走化性方程式の振動解について、日本数学会 2012 年度年会、東京理科大学 神楽坂キャンパス、東京都新宿区、2012 年 3 月 26 日~3 月 29 日 (講演日 28 日)。

T. Senba, Stability of stationary solutions to a chemotaxis system in high dimensional spaces, Conference on Evolution Equations, Related Topics and Applications, 日本学術振興会 平成 23 年度 二国間交流事業 (ドイツとのセミナー) , Waseda University, 2012/03/19/-23/ (Talk March 19)。

仙葉 隆, 内藤 雄基、2次元平面上の単純化された Keller-Segel 系の振動解について、日本数学会 2011 年度年会、信州大学 松本キャンパス、松本市、2011 年 9 月 28 日~10 月 1 日 (講演日 20 日)。

T. Senba, Bounded and unbounded oscillating solutions to a parabolic-elliptic system related to biology, The seventh "topics in Nonlinear Problems", 熊本大学 黒髪南キャンパス, 熊本市, 2011 年 9 月 23 日~25 日 (講演 9 月 23 日)。

仙葉 隆, 高次元領域における走化性方程式の定常解の安定性、夏の偏微分方程式セミナー 2011、龍谷大学セミナーハウス「ともいき荘」、京都市、2011 年 8 月 4 日~6 日 (講演 8 月 5 日)。

T. Senba, Oscillation of solutions to a parabolic-elliptic system related to chemotaxis, HMA セミナー (広島数理解析セミナー)・冬の研究集会 (2011), 広島大学理学部, 東広島市, 2011 年 1 月 28 日~29 日 (講演 1 月 29 日)。

[図書](計 1 件)

T. Senba, T. Suzuki, *Applied Analysis, Mathematical Methods in Natural Science* 2nd Edition, Imperial College Press, 2011. 4月.

[産業財産権]

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織

(1)研究代表者

仙葉 隆 (Senba Takasi)

九州工業大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：30196985

(2)研究分担者

該当なし。

(3)連携研究者

該当なし。