

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540201

研究課題名（和文） L_p 関数の定める数列空間の線形性と位相研究課題名（英文） Linearity and topology of a sequence space determined by an L_p function

研究代表者

岡崎 悦明 (OKAZAKI YOSHIKI)

九州工業大学・大学院情報工学研究院・教授

研究者番号：40037297

研究成果の概要（和文）：

関数 $f(\neq 0) \in L_p$ の定める新しい数列距離空間 $(\Lambda_p(f), d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ を導入しその代数的構造および距離構造について研究した。この数列空間は l_p に含まれており、Zygmund 型数列空間 $l_2(\log l)^s$ をはじめ種々の興味ある空間を実現する。しかし一般には $\Lambda_p(f)$ は線形ではなくまた $(\Lambda_p(f), d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ の数列空間としての具体的な特徴づけは知られていない。本研究では $\Lambda_p(f)$ の線形構造についての知見を深め、数列空間たち $\Lambda_p(f)$, $\Lambda_q(g)$, l_p の包含関係を調べることにより、包含関係から距離不等式が導かれることを見出した。この応用としてルベグ積分の平行移動のオーダーの評価が得られる。特に $p=2$ の場合に、距離 $d_2^f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の上下からの数列型評価を証明することにより、 $\Lambda_2(f)$ の線形性を関数 $\phi_f(x) = \int_{[0, x]} \alpha^2 |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha$ (\tilde{f} はフーリエ変換) の doubling condition により与えることに成功した。

研究成果の概要（英文）：

A new metric sequence space $(\Lambda_p(f), d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ is derived from a single function $f(\neq 0) \in L_p$. $\Lambda_p(f)$ is included in l_p and realizes various interesting sequence spaces such as the Zygmund space $l_2(\log l)^s$. But in general, $\Lambda_p(f)$ is not linear and the explicit estimation as a sequence space is not clear. We investigate the linearity and the metric structure of $\Lambda_p(f)$. We proved that mutual inclusion relation between $\Lambda_p(f)$ and $\Lambda_q(g)$ imply the metric inequality. Specifying the case to $p=2$, the linearity and the characterization as a sequence space of $\Lambda_2(f)$ is discussed by defining the doubling condition. By proving the upper and lower estimation of the metric $d_2^f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ by sequences, the linearity of $\Lambda_2(f)$ is discussed by the doubling condition of a function $\phi_f(x) = \int_{[0, x]} \alpha^2 |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha$, where \tilde{f} is the Fourier transform.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：実解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：実解析

1. 研究開始当初の背景

無限直積確率測度の平行移動に関する絶対連続性の研究は角谷静夫の基本的文献(Ann. Math. 49, 1948)を基礎として, L. A. Shepp(Ann. Math. Stat. 36, 1965)によりその必要十分条件が示され完結したかの感があった. しかし Sheppの結果を, 関数 \sqrt{f} (f は確率密度関数)の定める数列空間論として見直したとき, そこには Shepp の必要十分条件,

$$\int_{\mathbb{R}} |(\sqrt{f})'|^2 dx < +\infty$$

を外れた場合にも多くの興味ある問題があること, 興味ある未知の数列空間が出現すること, 一般の L_p 関数の定める新しい数列空間論への発展の可能性等が散見できる状況にあった. 実際 Shepp の場合は l_2 空間が出現するのみであるが,

$$\int_{\mathbb{R}} |(\sqrt{f})'|^2 dx = +\infty$$

の場合には Zygmund 型数列空間 $l_2(\log l)^s$ をはじめ種々の数列空間が現れる. 更には考察する関数も確率密度関数の平方根 \sqrt{f} に限らず一般の L_p 関数に広げることにも念頭に置くことを予定した. これは私たちの初期の結果 (Proc. Japan Acad. 84, 2008)から確認できるものであった. この結果を発展させるべく, 本研究に取り組むこととなったものである.

2. 研究の目的

本研究の目的は, 自明でない L_p 関数 f の定める数列距離空間 $(\Lambda_p(f), d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ について, その線形並びに距離構造を説明すると共に, 新しい数列空間論として一般化し発展させることである. 研究すべき具体的目標として以下の諸問題を設定し解決して行きたい. 即ち

- (1) $\Lambda_p(f)$ の線形構造の解明 :
 $\Lambda_p(f)$ が線形となる関数 f の満たすべき性質は何か? このような関数のクラスを特定したい.
- (2) 距離構造と位相の解明 :
 $(\Lambda_p(f), d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ は完備であるか? また $\Lambda_p(f)$ が線形するとき $(\Lambda_p(f), d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ は位相線形空間になるか?

- (3) 具体的な $\Lambda_p(f)$ の構造決定と他の数列空間との相互関係の解明 :
 $\Lambda_p(f) = \Lambda_p(g)$ をたす関数 f および g の相互関係は何か? $\Lambda_p(f) = l_p$ を満たす f を特徴づけを与え得るか? 包含関係 $\Lambda_p(f) \subset \Lambda_q(g)$ は距離 d_p^f, d_q^g の間にいかなる相互関係を導くか? 等を研究目的とする.

- (4) $p=2$ の場合は, 無限直積確率測度の平行移動へのフィードバックも考えられ, 独自の意味を持つ重要な場合である. ここでは $\Lambda_2(f)$ の数列空間としての特徴づけ, 線形および距離構造の解明, とくに距離 $d_2^f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の数列表現を得たい.

- (5) 実解析への応用.

3. 研究の方法

我々の研究対象の数列空間は今まで研究の対象になったことのない新規の数列空間であり, 従来にない新しい性質を持つことが期待できる. しかし, 従来の関数解析的方法論は線形性に深く依存しており, 我々の非線形空間ではそのままでは適用できない. このため新たに研究方法を開発しながら研究を進めなければならない.

- (1) 線形性を導く幾何学的条件として, f が単峰関数であれば十分であることは既に初期の研究で証明している. この関数のクラスの自然な拡張として, 区分的に単調な関数のクラスを設定し, ここで線形性を検証する.
- (2) $\Lambda_p(f)$ が線形であれば位相線形空間であるかどうかを決定するにあたっては, 閉グラフ定理の非線形版を Baire の定理に立ち返って確立し, 問題解決に利用する.
- (3) 数列空間たち $\Lambda_p(f), \Lambda_q(g), l_p$ の包含関係とそれぞれの距離間の距離不等式との関係に着目する. ここでは Shepp の条件の拡張

$$I_p(f) = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^p dx < +\infty$$

を導入することが重要である.

- (4) $p=2$ の場合は距離関数が $d_2(\mathbf{a}, \mathbf{0})^2 = 2 \sum_k \int (1 - \cos(a_k \alpha)) |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$ (\hat{f} はフーリエ変換) と表現できるので、フーリエ解析の手法が有効である。

① 上記距離を数列表現するために距離の上下からの数列評価を考察する。

① doubling 条件を導入しフーリエ変換 \hat{f} の doubling 条件と $\Lambda_2(f)$ の線形性との関連を調べる。

② $\Lambda_2(f)$ の内側近似空間及び外側近似空間を導入し、 $\Lambda_2(f)$ の線形および位相構造解明に迫る。

4. 研究成果

本研究は新しいタイプの数列空間の性質を解明しまた実解析への応用が期待できることから、今後の更なる発展の基礎を開拓するものである。本研究期間内に以下の成果を得た。

- (1) f が区分的に単調な関数のクラスに属するとき $\Lambda_p(f)$ は線形空間であることを示した。
- (2) $\Lambda_p(f)$ が線形であれば ($\Lambda_p(f)$, $d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) 位相線形空間であることを証明した。
- (3) 数列空間の包含関係 $\Lambda_p(f) \subset \Lambda_q(g)$ から距離不等式 $d_q^g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq K d_p^f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ が得られることを証明した。 lp との包含関係もテント関数を利用して統一的に議論できた。
- (4) 距離関数の上下の数列評価を証明し $\Lambda_2(f)$ が線形であるための必要十分条件を見出した。
- (5) 内側近似空間は $\Lambda_2(f)$ の最大の線形部分空間であることを見出した。また内側近似空間に完備な距離を構成し位相線形空間にできることを示した。
- (6) doubling 次元が 2 より真に小さいとき外側近似空間と内側近似空間は共に $\Lambda_2(f)$ と一致し、結果として $\Lambda_2(f)$ は線形になることを証明した。

- (7) 本研究の応用として L_p 関数の平行移動ルベグ積分 $\eta(h) := \int |f(x-h) - f(x)|^p dx$ の連続性のオーダーの評価が $|h|^p$ ($|h| < 1$) であるための必要十分条件は $\int |f'(x)|^p dx < +\infty$ であることを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦 (2 番目) The new sequence space $\Lambda_p(f)$, Proc. of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces, 査読有, 2013 (掲載決定)。
- ② 乃美正哉, 本田あおい, 岡崎悦明 (3 番目) A trust evaluation of networks utilizing matrix operations based on t -norms and t -conorms, J. of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, 査読有, 16 巻 1 号, 2012, 154-161.
- ③ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦 (2 番目) Metrics on the sequence space $\Lambda_p(f)$, Kyushu J. of Math., 査読有, 66 巻 2 号, 2012, 365-374.
- ④ 乃美正哉, 本田あおい, 岡崎悦明 (3 番目) On generating functions of two-dimensional t -norms, Advanced in Intelligent and Soft Computing, 査読有, 100 巻, 2011, 627-634.
- ⑤ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦 (2 番目) Doubling condition and linearity of the sequence space $\Lambda_p(f)$, Kyushu J. of Math., 査読有, 65 巻 2 号, 2011, 335-347.

[学会発表] (計 10 件)

- ① 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦 数列空間 $\Lambda_2(f)$ の内側および外側近似空間と lp たち, 日本数学会, 2013 年 3 月 21 日, 京都大学 (京都市)。
- ② 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦 Lebesgue 積分の平行移動の連続性と数列空間 $\Lambda_p(f)$, 実解析シンポジウム 2012, 2012 年 10 月 27 日, 茨城大 (水戸市)。

九州大学名誉教授
研究者番号：なし

- ③ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
数列空間 $\Lambda_2(f)$ の最大の線形部分空間と
その数列表現, 日本数学会, 2012年9月
20日, 九州大学(福岡市).
- ④ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
数列空間 $\Lambda_2^\phi(f)$ の擬距離位相と線形
性, 日本数学会, 2012年3月29日, 東京
理科大(東京).
- ⑤ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
数列空間 $\Lambda_p(f)$ たちの距離位相～包含関
係から連続性へ～, 実解析学シンポジウ
ム2011, 2011年11月5日, 信州大学(松
本市).
- ⑥ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
テント関数と数列空間 $\Lambda_p(f)$ たちの連
続性, 日本数学会, 2011年9月28日, 信
州大学(松本市).
- ⑦ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
数列空間 $\Lambda_p(f)$ の距離位相, 日本数学会,
2011年3月20日, 早稲田大学西早稲田キ
ャンパス(東京).
- ⑧ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
Doubling condition の拡張とその応用,
バナッハ空間論の研究とその周辺, 2011
年2月15日, 京大数理研(京都市).
- ⑨ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
Linearity of sequence space $\Lambda_p(f)$ and
doubling condition, 実解析シンポジウ
ム2010, 2010年11月13日, 九州工大(北
九州市).
- ⑩ 本田あおい, 岡崎悦明, 佐藤 坦
Doubling condition と数列空間 $\Lambda_2(f)$ の
線形性, 日本数学会, 2010年9月24日,
名古屋大学(名古屋市).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡崎 悦明 (OKAZAKI YOSHIAKI)
九州工業大学・大学院情報工学研究院・教
授
研究者番号：40037297

(2) 研究分担者

本田あおい (HONDA AOI)
九州工業大学・大学院情報工学研究院・准
教授
研究者番号：50271119

(3) 研究協力者

佐藤 坦 (SATO HIROSHI)

