

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 3 月 31 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540202

研究課題名（和文）圧縮性流体方程式系の解の構造の研究

研究課題名（英文）Structure of the solutions to the system of compressible fluid

研究代表者 小林 孝行 (KOBAYASHI TAKAYUKI)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授

研究者番号：50272133

研究成果の概要（和文）：

2次元外部領域における摩擦項付き非線形波動方程式と非線形熱方程式の初期値境界値問題を考察し、初期値が Hardy 空間に属する場合に、解の時空間に関する L^2 有界性を示した。圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式系では、緩和項に付随するパラメーターの消滅による流体力学的極限は退化 Drift-Diffusion 方程式となることを、単原子気体を含むより広い圧力場の場合に弱解の枠組みで証明した。

研究成果の概要（英文）：

We consider the initial boundary value problems for the semilinear damped wave equations and the semilinear heat equations in two dimension exterior domains. We give the L^2 boundedness with respect to the space and time valuables of the solutions. Also, we consider the zero relaxation time approximation to the compressible Navier-Stokes-Poisson system to derive the mono-polar drift-diffusion system of degenerated type in a framework of the theory of weak solution.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：物理系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式

1. 研究開始当初の背景
流体力学に現れる圧縮性粘性流体の運動を記述した圧縮性 Navier-Stokes 方程式では、

A. Matsumura and T. Nishida により、圧縮性 Navier-Stokes 方程式の定数平衡状態は、小さい初期摂動に対して安定であることが

示され、より詳しい解の漸近構造は、D. Hoff and K. Zumbrun, Kagei and Kobayashi 等により研究されている。圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解は、定数平衡状態の近くでは、その線形化方程式が双曲型放物型混合方程式であり、特に密度部分が線形粘性弾性体方程式を満たすため、拡散波動の現象、特に広い意味での Huygens の原理が現れることが示唆されている。これまでの定数平衡状態の周りでの線形化方程式の解の表現公式の漸近展開の解析から、解は、拡散項、拡散波動項、高減衰項に分類され、拡散項の第一近似は、半空間の場合は非定常 Stokes 方程式の解の速度場であり。従って、熱方程式の解が第一近似である全空間の場合と異なること、また、非線形相互作用も全空間と半空間では異なるという結論が得られている。一方、空間に関して重み付き評価や初期摂動が振動して全密度が消えた場合は、半空間でも、全空間に近い挙動が現れることが予想される。特に、空間に関する重み付き評価の考察は、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式や Keller-Seagl 方程式系の研究でも見られるように、解の高次漸近展開の考察において欠かせないものであり、そのため、各空間で圧縮性 Navier-Stokes 方程式と非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の空間に関する重み付き評価を調べ、漸近的な解の構造の相違及び類似を明らかにすることは重要である。特に、外部領域の研究においては、解の減衰評価以外これまで研究されていないため、全空間および半空間との相違、類似点を解明するが重要である。また、これまでの圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の構造の研究では、線形化方程式の 2 次元空間における解析は、可積分性や Sobolev の埋め込み定理の臨界にあたるため困難さが生じ十分な結果が得られていない。そのため、Morawetz の方法

と Hardy 空間を用いたエネルギー法を用いて線形粘性弾性体方程式の解の構造を詳細に解析し、圧縮性 Navier-Stokes 方程式の密度部分の解の構造を明らかにすることも重要である。

気体星の運動や半導体やプラズマの数学モデルにおける圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式系では、特に気体星の場合、圧力が isentropic で密度のべき乗のとき、その指数には非線形熱方程式の藤田型臨界指数が現れ、さらに強解は有限時間で爆発するため、定常解の安定性、非安定性の議論には、弱解の構成とその枠組みによる理論の構築が重要である。P.L. Lions は圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間大域的弱解を構成し、有界領域、非有界領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式および圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式では、単原子気体を含むより広い圧力場の場合に、E. Feireisl 等により時間大域的弱解が構成されている。しかし、藤田型臨界指数まで到達していないため、緩和項に付随するパラメータの消滅による流体力学的極限の数学的厳密な説明は、未だ不十分と言える。そのため、本研究では、2 次元以上の場合に緩和項に付随するパラメータの消滅による流体力学的極限を研究し、圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式の解の漸近構造を明らかにすることが目的である。

2. 研究の目的

本研究では、圧縮性粘性流体方程式系の解の構造を明らかにする研究を行う。全空間、半空間、外部領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式系の初期値問題、初期値境界値問題では、定数平衡解の安定性のこれまでの研究において、解の拡散波動の現象と広い意味でのホイゲンスの原理の解明が

示唆されており、本研究では、解の第一近似として現れる線形粘性弾性体方程式と非圧縮性の Stokes 方程式および Navier-Stokes 方程式の解の時間に関する漸近挙動について解析することで、各空間の影響による圧縮性 Navier-Stokes 方程式と非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の構造の相違及び類似点を解明し、圧縮性粘性流体方程式系の解の構造を明らかにすることが目的である。また、粘性を考慮した自己重力場における気体星の運動を記述した圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式系では、圧力が isentropic で密度のべき乗である場合、その指数には非線形熱方程式の藤田型臨界指数が現れ、さらに強解は有限時間で爆発するため、定常解の安定性および非安定性の解析には、弱解の枠組みの理論の構築が必要である。そのため、本研究では、緩和項に付随するパラメーターの消滅による流体力学的極限を研究することにより、単原子気体を含むより広い圧力場の場合にも適応できる弱解の理論の構築と解の構造を明らかにすることが目的である。

3. 研究の方法

本研究目的を遂行するためには、多くの数学者との研究討論が不可欠であり、また、最新の結果や手法を常に研究することが必要である。そのため、主に国内外の関連する研究集会をはじめ、九州大学、熊本大学および広島大学のセミナーに出席し情報収集を行い、研究分担者、連携研究者をはじめ多くの数学者と研究討論を行う。研究分担者の梶木屋龍治教授とは圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式系の非線形楕円型方程式の部分の研究、研究討論及び情報収集、連携研究者の三沢正史教授とは線形粘性弾性体方程式の実解析的な手法、池畠良准教授とは線形粘性弾

性体方程式の解析、隠居良行教授とは圧縮性 Navier-Stokes 方程式の非線形部分の解析の研究および研究討論を行い、研究代表者である申請者が総括する。研究方法と研究分担者(連携研究者)との分担は以下である。

(1) D. Hoff and K. Zumbrun の結果を参考にして、波動方程式系のエネルギー法の専門家である池畠良准教授と研究討論を行い、合わせて、実解析学的手法による解の正則性の研究の専門家である三沢正史教授と研究討論し、線形粘性弾性体方程式系の解の構造の研究を行い、圧縮性 Navier-Stokes 方程式の密度部分の解の構造を研究する。

(2) 外部領域における Stokes 半群の空間に関する重み付き評価を考察し、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の空間に関する重み付き評価を研究し、圧縮性 Navier-Stokes 方程式の研究の専門家である隠居良行教授と圧縮性 Navier-Stokes 方程式への応用を研究討論する。また、上下半空間に穴の開いた仕切りがある aperture 領域。摂動のある半空間における非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の空間に関する重み付き評価を研究する。さらに、隠居良行教授と研究討論し、各空間におけるこれまでの結果を下に、圧縮性 Navier-Stokes 方程式と非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の空間に関する重み付き評価を調べ、漸近的な解の構造の相違及び類似を研究する。

(3) 圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式系の Poisson 項は非線形楕円型方程式であるため、非線形楕円型方程式論の専門家である梶木屋龍治教授と最新の情報収集および研究討論を行う。

(4) P. L. Lions[2], E. Feireisl [3] 等によって発展してきた圧縮性 Navier-Stokes 方程式の弱解の理論について研究し、3次元以上における圧縮性

Navier-Stokes-Poisson 方程式系の緩和項に付随するパラメーターの消滅による流体力学的極限の研究を行う。また、気体星の運動や半導体、プラズマの数学モデル等を記述した圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式系では、2次元空間において、その緩和項に付随するパラメーターの消滅による流体力学的極限について研究する。小林が担当する。

4. 研究成果

全空間における圧縮性 Navier-Stokes 方程式系の初期値問題、半空間や外部領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式系の初期値境界値問題では、定数平衡解の安定性のこれまでの研究において、特に、解の時間に関する漸近挙動の研究から、解の拡散波動の現象と広い意味でのホイゲンスの原理の解明が示唆されており、そのため、解の第一近似として現れる線形粘性弾性体方程式と非圧縮性の Stokes 方程式および Navier-Stokes 方程式の解の時間に関する漸近挙動について解析を行った。線形粘性弾性体方程式の解の時間に関する漸近挙動を解析する上で、まず2次元外部領域における波動方程式の初期値境界値問題、摩擦項付き波動方程式の初期値境界値問題、および摩擦項付き冪乗型の非線形波動方程式の初期値境界値問題を考察した。初期値がコンパクトな台を持つ場合は解の減衰評価は知られていたが、初期値がコンパクトな台を持たない場合は部分的な結果しか得られていなかった。我々は初期値が Hardy 空間に属する場合を考え、エネルギー法において、Morawetz の手法と Fefferman-Stein の不等式を用いることで、波動方程式の場合は、局所エネルギー減衰評価、摩擦項付き波動方程式の場合は、2次元では臨界である解の時空間に関する L^2 有界性を得ることが出来た。外部領域における摩擦項付き非線形波動方程式の初期値境界値問題では、2次元外部領域における Hardy の不等式に対応した、空間に関する重み付きの冪乗型非線形構造に着目し、摩擦項付き線形波動方程式の場合と同様に2次元では臨界となる解の時空間に関する L^2 有界性を得ることが出来た。また、熱方程式でも同様の結果が得られた。特に熱方程式の場合は、Hardy 空間より広い L^1 空間に初期値が属する場合、この正則性の結果は一般には得られない。摩擦項付き非線形波動方程式では、重み付きの非線形構造に着目することで、線

形方程式の場合には使わなかったエネルギー評価のある項を使い、Hardy の不等式を用いることで初期値がコンパクトな台を持つ仮定を取り除き、解の減衰評価を得ることに成功した。これらの結果より、このような非線形構造をもつ熱方程式、摩擦項付き波動方程式の初期値境界値問題では、解の存在の臨界指数である藤田指数が通常冪乗型非線形の場合と異なることが予想される。また、これらの方法は、全空間における線形粘性弾性体方程式の初期値問題、さらに、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題や圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題への応用が期待される。

気体星の運動や半導体やプラズマの数学モデルにおける圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式系では、特に気体星の場合、圧力が isentropic で密度のべき乗のとき、その指数には非線形熱方程式の藤田型臨界指数が現れ、さらに強解は有限時間で爆発するため、定常解の安定性、非安定性の議論には、弱解の構成とその枠組みによる理論の構築が重要である。P. L. Lions は圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時間大域的弱解を構成し、有界領域、非有界領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式および圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 方程式では、単原子気体を含むより広い圧力場の場合に、E. Feireisl 等により時間大域的弱解が構成されている。我々は、これらの圧縮性 Navier-Stokes 方程式の弱解の理論を応用し、改良することで、緩和項に付随するパラメーターの消滅による流体力学的極限は退化 Drift-Diffusion 方程式となることを、単原子気体を含むより広い圧力場の場合に対して、数学的に厳密な説明を与えることに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

[1] T. Kobayashi and T. Ogawa, Fluid Mechanical Approximation to the Degenerated Drift-Diffusion System from Compressible Navier-Stokes-Poisson system, to appear in Indiana University Mathematics Journal. 査読有。

[2] T. Kobayashi and M. Misawa, L^2 boundedness for the 2D exterior problems for the semilinear heat and dissipative wave equations, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu: Harmonic Analysis and Nonlinear Partial

Differential Equations. eds. T. Ozawa, M. Sugimoto. 査読有.

[3] R. Kajikiya, Non-radial least energy solutions of the generalized Helmholtz equation., J. Differential Equations, 252, No. 2, (2012), pp. 1987-2003. 査読有

[4] Y. Kagei, Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow, Arch. Rational Mech. Anal. Vol. 205, (2012), no. 2, pp. 585-650. 査読有

[5] R. Ikehata, and M. Natsume, Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping, Differential and Integral Eqns. 25, (2012), No. 9-10, pp. 939-956. 査読有

[6] M. Misawa, S. Okamura and T. Kobayashi, Decay Property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains., Differential and Integral Equations. 63, No. 1, (2011), pp 263-294. 査読有

[7] R. Kajikiya, Sublinear elliptic equations with singular coefficients on the boundar, J. Math. Soc. Japan, 63, No. 1, (2011), pp. 263-294. 査読有

[8] Y. Kagei, Global existence of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around parallel flows, J. Differential Equations, vol. 251 (2011), pp. 3248-3295. 査読有

[9] R. C. Charaon and R. Ikehata, Energy decay rates of elastic waves in unbounded domain with potential type of damping, J. Math. Anal. Appl. 380, No. 5 (2011), pp. 46-56. 査読有

[10] R. Kajikiya, Superlinear elliptic equations with singular coefficients on the boundary, Nonlinear Analysis, T.M.A. 73, No. 7, (2010), pp. 2117-2131. 査読有

[11] S. Aikawa and R. Ikehata, Local energy decay for a class of hyperbolic equations with constant coefficients near infinity, Math. Nachr. 283, No. 5 (2010), pp. 636-647. 査読有

[学会発表] (計 18 件)

[1] T. Kobayashi,

L2 boundedness for the solutions to the 2D Navier-Stokes equations, Parabolic and Navier-Stokes Equations, 2012 年 9 月 6 日, Banach center, Bedlewo, Poland

[2] T. Kobayashi, L2 boundedness of solutions for the 2D semilinear dissipative wave equations, RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」

2012 年 7 月 4 日, 京都大学数理解析研究所

[3] R. Kajikiya, Non-radial positive solutions of the Helmholtz equation, International Symposium on Nonlinear Analysis and Optimization 2012, 2012 年 2 月 8 日-10 日, Pukyong National University, Pusan, Korea

[4] M. Misawa, A regularity for nonlinear parabolic systems of p-Laplacian type with critical growth, アールト大学数学解析セミナー, 2012 年 9 月 11 日, アールト大学, Helsinki, Finland

[5] Y. Kagei, Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation around parallel flows, 2012 Fall Trimester Applied Math Colloquium, 2012 年 11 月 15 日, School of Technology Management Ulsan National Institute of Science and Technology (UNIST), Ulsan, Republic of Korea

[6] R. Ikehata, Energy decay estimates for wave equations with a fractional dampin, 第 9 回 AIMS International Conference on dynamical Systems, Differential equations and Applications, 2012 年 7 月 4 日, Hyatt Regency Grand Cypress, Orlando, Florida, USA

[7] T. Kobayashi, Weighted L_p theory for the Stokes resolvent in some unbounded domains, 第 4 回 日独流体数学国際研究集会, 2011 年 11 月 28 日~12 月 2 日, 早稲田大学

[8] T. Kobayashi, Decay property of solutions to the 2D Wave equations with damping terms or strong damping terms, Pohang-Kyushu workshop on Partial Differential Equations. 2011 年 6 月 1 7 日, POSTECH, Pohang, 韓国

[9] T. Kobayashi, Weighted estimates of the solutions to the Navier-Stokes equations in half space and

perturbed half-space, Workshop on Applied Mathematics Euskadi-Kyushu 2011, 2011年3月10日, Basque Center for Applied Mathematics, Spain

[10] R. Kajikiya,

Existence of non-radial solutions for the generalized Helmholtz equation, 2011 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2011年6月20日-24日 Pusan National University, Pusan, Korea

[11] Y. Kagei,

On the stability of parallel flows of the compressible Navier-Stokes equation, The 3rd Kyushu University-POSTECH Joint Workshop - Partial Differential Equations and Fluid Dynamics, 2011年6月16-17, POSTECH, Pohang, Korea

[12] R. Ikehata,

空間遠方で臨界減衰する摩擦項を持つ波動方程式のエネルギー減衰についての新展開, 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会(特別講演), 2011年9月30日, 信州大学

[13] T. Kobayashi,

Weighted Lp-Lq estimates for the Stokes semigroup in some unbounded domains, 研究集会「Partial differential equations and Mathematical Physics」, 2010年11月16日, 芝蘭会館別館, 京都

[14] T. Kobayashi,

Weighted estimates for the Stokes semigroup in half space and perturbed half-space, "Regularity aspects of PDE - a week for Wojciech Zajączkowski", 2010年9月11日, Banach center, Bedlewo, Poland

[15] R. Kajikiya,

Stability of solutions for fast diffusion equations, 微分方程式の総合的研究, 2010年12月18日-19日, 京都大学

[16] M. Misawa,

時間発展 p 調和方程式系に対するヘルダー評価について, 奈良女子大学偏微分方程式研究集会, 2010年6月27日, 奈良女子大学

[17] Y. Kagei,

Asymptotic behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow, 13th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory Numerics, Applications, 2010年6月15日-19日, Beijing, China

[18] R. Ikehata,

Conference on dynamical Systems, Differential equations and Applications,

2010年5月27日, Dresden University of Technology, Dresden, Germany

〔図書〕 (計0件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 孝行 (KOBAYASHI TAKAYUKI)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号: 50272133

(2) 研究分担者

梶木屋 龍治 (KAJIKIYA RYUJI)

佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号: 10183261

(3) 連携研究者

隠居 良行 (KAGEI YOSHIYUKI)

九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 80243913

三沢 正史 (MISAWA MASASHI)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 40242672

池畠 良 (IKEHATA RYO)

広島大学・教育学研究科・教授
研究者番号: 10249758