

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 13 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540203

研究課題名（和文） 変分問題、最適化問題および非線形偏微分方程式の解の構造の研究

研究課題名（英文） Study of structures of solutions to variational problems, optimization problems and nonlinear partial differential equations

研究代表者

倉田 和浩（KURATA KAZUHIRO）

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：10186489

研究成果の概要（和文）：

環境効果の入ったアレン・カーン型方程式や飽和効果をもつケモタキシス系などのパターン形成問題において、対応する非線形反応・拡散偏微分方程式を解析し、非一様定常パターンの数学的に厳密な存在証明を行った。

研究成果の概要（英文）：

We proved existence of non-constant stationary solutions to nonlinear reaction-diffusion equations arising in some pattern formation problems, for example, an Allen-Chan model with non-homogeneous environment and a Chemotaxis model with saturation effect.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式、パターン形成、変分問題、非線形楕円型方程式、特異摂動問題、楕円型作用素の固有値、非線形楕円型固有値問題、逆問題

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式は自然現象、生命現象の数理モデルとして、あるいは幾何学的対象を解析的に研究する際に広く現れる。特に、さまざまな非線形現象の記述に現れる非線形偏微分方程式は多岐にわたり、個々の非線形偏微分方程式の解の構造を解明することで、対応する非線形現象の数学的な知見を深めることは重要である。近年、そうしたさまざまな現象を記述する数理モデルに現れる非線形偏微分方程式の数学的研究は、個々の現象理解に強く関わりを持ちながら多様な数学的アプローチから、内在する数学的構造の研究に新たな進展を引き起こしている状況にあ

る。本研究の全体的構想としては、そうした個々の興味深い非線形現象を記述する非線形偏微分方程式の解の構造を数学的に解明して現象のより深い理解を獲得することを目指すと同時に、特に環境効果の解の構造への影響に重点をおいて、その解析の基礎にもなる線形偏微分方程式の定性的かつ定量的な解の構造の研究をも視野にいたれた総合的研究を目的としたものである。また、固有値最適化問題、最適形状問題などにおける最適解の形状の研究などは、線形偏微分方程式で記述される境界値問題が元になっているとはいえ、現象的には一意性の崩れなど非線形現象の一種と見なしての統一的視点をもつ

て研究していく方がいいと考えており、線形およびさまざまな非線形偏微分方程式を取り扱う構想を持っている。そのために、扱う現象も多岐にわたるため、変分問題、最適化問題、非線形偏微分方程式、スペクトル理論、数値解析、数値シミュレーションおよび調和解析における研究テーマを研究し続けている連携研究者らと適宜連携をとりながら、多面的な角度からの現象の解析を意図したものである。

2. 研究の目的

- (1) さまざまな数理生態学モデルにおいて、その多様な安定定常パターンの存在問題を、環境効果や飽和効果という観点から追及する。特に、個体数が小さいときには固体増殖率がロジスチック法則におけるように一定ではなく個体数に比例するというアレ効果を考慮した増殖モデルにおけるパターン形成の研究、アレン・カーン型の等価なエネルギー値をもつ双安定なモデルでの環境効果による安定パターンが出現の研究、飽和効果の入った走化性現象を記述するあるケモタキシス系モデルなどの多重スパイク状の定常解の研究などを目的とする。
- (2) 固有値問題や非線形問題などに付随する無現次元の最適化問題に対して、研究代表者らはディリクレ境界条件下での固有値最適化問題の研究で、最適解の存在と領域のもつ対称性でシュタイナー対称性を最適解は保存するが、一般に軸対称性とか球対称性は崩れる現象を見出している。ここでは対称性の崩れ現象の定量的解析の研究を行うことを目的とする。さらに、ノイマン境界条件下での最適解の形状の研究も数理生態学や超伝導モデルからの動機から興味深く、その最適解の定性的研究の重要性が増している。最適解の存在は証明されているものの、その定性的解析は困難な状況にあるのが現状ではあるが、ロバン境界条件のもとでの現象を含め、その研究を進めたい。
- (3) 連携研究者らの協力を得ながら、ボーズ・アインシュタイン凝縮現象、相分離現象、超伝導現象などに現れる非線形楕円型方程式系、非線形シュレディンガー方程式、非線形固有値問題などの解の構造の研究、および種々の楕円型作用素の固有値の定量的評価の研究を行うことを目的とする。

3. 研究の方法

変分法、偏微分方程式、非線形解析、数値シミュレーションなどのさまざまな手法の検討を行いながら、偏微分方程式の解の構造の研究、固有値問題や非線形楕円型境界値問題等における最適化問題、数理生態学におけるパターン形成と環境効果および飽和効果との関係、反応拡散方程式系の定常解の構造の

研究、また物理における超伝導現象や相分離現象などに現れるさまざまな解の構造の研究を行う。研究代表者は、個々の項目において、連携研究者の協力を適宜得て、変分問題、最適化問題、偏微分方程式の研究の統括を行う。変分問題については、連携研究者の神保秀一氏には固有値問題や超伝導現象の問題、田中和永氏には変分法および特異摂動問題、柴田徹太郎氏には非線形固有値問題および漸近解析、柴田将敬氏には非線形シュレディンガー方程式に関する助言・協力を得ながら研究を行う。

4. 研究成果

- (1) 研究代表者の倉田は、以下の研究成果を得た。
 - ① 松澤寛氏（沼津高専）との共同研究において、エネルギーバランスのあるアレン・カーン型の双安定な反応拡散方程式において環境効果によって、空間非一様な安定定常パターンの多重存在に関する研究を行った。エネルギーバランスがある場合のパターン形成への新たな環境効果を明らかにした点、一定の意義がある成果となっている。
 - ② 森本光太郎氏（鎌倉女子大）との共同研究において、ギーラー・マインハルト系に対する森本光太郎氏との共同研究の手法を発展させ、飽和効果のあるケモタキシス系におけるパターン形成問題に対して、軸対称な領域上での軸対象な解でいくつかの点に凝縮するような多重スパイク定常解の構成を行った。軸対称領域という対称性の仮定はあるものの、飽和効果のある系に対する汎用的な1つの解析法を提示している点で、今後の展開の1つの基礎になりうるものと思われる。
 - ③ 連携研究者の1人でもある神保秀一氏（北大）との共同研究において、細い領域でのラプラシアンディリクレ・ノイマン混合境界条件下での固有値を考え、幅の値をゼロに近づけたときの詳細な漸近的展開公式を得た。この問題での平均曲率等の幾何的な要因の役割を詳細に取りだすことに成功した点、関連する話題へのインパクトが大きいと思われる。
 - ④ 島崎大地氏（首都大・大学院生）との共同研究において、環境が時間とともに変動するような効果をもつ反応拡散方程式に対して、進行波解の存在問題を変分問題の観点から研究した。
 - ⑤ 垣内達行氏（首都大・大学院生）との共同研究において、オーミック加熱現象を記述する数理モデルに現れる非線形楕円型境界値問題の解の構造を、物理的にも自然なロバン境界条件の下で研究し、ディリクレ境界条件の場合より豊富な解の構造を持つことを示した。

(2) 連携研究者の神保秀一氏は、全般に楕円型作用素の固有値の挙動の解析に関する課題に取り組み、以下の成果を得た。

①領域変形と電磁波の固有振動の摂動問題: マクスウェルの波動方程式に現れる振動解の振動数を特徴付け、滑らかな領域変形に関する変分公式(アダマール型変分公式の導出)を求めた。

②特異領域変形と変数係数楕円型作用素の固有値の漸近挙動: 小さな穴あるいは管状の穴を持つ領域における変数係数をもつ楕円型作用素の固有値の挙動(漸近公式)を求めた。

③小さな剛性率をもつラメ作用素の固有値の特徴付け(鎌田聖也氏と共同研究): 弾性体方程式の主要部をなすラメ作用素について第2ラメ定数が微小になる際の固有値の精密な挙動を求めた。

(3) 連携研究者の田中和永氏は、以下の研究を行った。

①非線形楕円型方程式に対する特異摂動問題を中心に研究を行った。従来、極限方程式に対して解の一意性、非退化性を仮定し Lyapunov-Schmidt 法等により議論されることが多かったが、それを仮定せずに解の存在を議論する局所的な変分的手法を見だし、種々の設定の下で凝集解の存在を示した。この方法論は、今後のこの分野の進展に大きく寄与するものと思われる。

②球対称な解の存在についても議論し、古典的な Berestycki-Lions の結果の拡張を行った。

③シュレディンガー方程式系に関する ground state の存在、および初期値問題の可解性を論じた。

④非線形振動に現れる非線形常微分方程式に対して高振動解の profile および存在を議論した。

(4) 連携研究者の柴田徹太郎氏は、以下の研究を行った。

①常微分方程式の分岐問題において、方程式が非自励系の場合や、方程式が $\sin u$ を含む場合にその分岐曲線の局所的・大域的漸近挙動の解析を行った。

②常微分方程式論的手法・変分法を主な解析手段として、非線形楕円型固有値問題の固有値と固有関数の漸近的性質の詳細に解析すること、また付随する逆問題を研究した。特に、常微分方程式の固有値問題の解の分岐曲線の局所的・大域的漸近挙動の解析と逆固有値問題の研究に関し、以下の成果を得た。

・1パラメーター固有値問題の分岐曲線の局所的・大域的漸近挙動と逆問題との関連を明らかにした。

・分岐曲線の局所的・大域的漸近挙動などの

特徴から未知の非線形項を決定する逆固有値問題について、一意性や未知の非線形項の再構成などに関する成果を得た。

(5) 連携研究者の柴田将敬氏は、以下の研究を行った。

①入江博氏(東京電機大学)との共同研究において、無限次元シンプレクティック Hilbert 空間における Hofer 幾何について研究を行い、適当な条件下では Hofer 幾何の構造があることを確認した。

②足達慎二氏(静岡大学)、渡辺達也氏(京都産業大学)との共同研究において、準線形シュレディンガー方程式の ground state について研究し、漸近挙動、解の一意性、非退化性についての結果を得た。

③一般的な非線形項をもつ、半線形シュレディンガー方程式の定在波解について研究を行い、安定な定在波解が存在するための条件を考察した。また、定在波解の安定性を示すため有用な、新しいリアレンジメント不等式を開発した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

① P. Felmer, S. Martiny, Kazunaga Tanaka, High energy rotation type solutions of the forced pendulum equation, Nonlinearity (掲載予定), (査読有).

② J. Byeon, Kazunaga Tanaka, Semiclassical standing waves with clustering peaks for nonlinear Schrödinger equations, Memoir Amer. Math. Soc. (掲載予定), (査読有).

③ J. Byeon, Kazunaga Tanaka, Semi-classical standing waves for nonlinear Schrödinger equations at structurally stable critical points of the potential, J. Eur. Math. Soc. (掲載予定), (査読有).

④ N. Hayashi, T. Ozawa, Kazunaga Tanaka, On a system of nonlinear Schrödinger equations with quadratic interaction, Annal. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire (掲載予定), (査読有).

⑤ Masataka Shibata, Stable standing waves of nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinear term, manuscripta mathematica, (掲載予定), (査読有).

⑥ Shinji Adachi, Masataka Shibata, Tatsuya Watanabe, Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations in \mathbb{R}^2 , Funkcialaj Ekvacioj, (掲載予定), (査読有)

⑦ Shuichi Jimbo, Hadamard variation for

electromagnetic frequencies, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, R. Magnanini et al. (eds), INdAM series 2 (2013), 179-200, Springer (査読有).

⑧ J. Byeon, Kazunaga Tanaka, Nonlinear elliptic equations in strip-like domains, Advanced Nonlinear Studies, 12 (2012), 749--765. (査読有)

⑨ Shuichi Jimbo, A. Morrasi, G. Nakamura, K. Shirota, A non destructive method for damage detection in steel-concrete structures based on finite eigendata, Inverse Problems in Science and Engineering 20 (2012), 233-270. (査読有)

⑩ Tetsutaro Shibata, Asymptotic approach to inverse bifurcation problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, Advanced Nonlinear Studies 12 (2012), 465--479. (査読有)

⑪ Tetsutaro Shibata, Critical exponents of the asymptotic formulas for two-parameter variational eigencurves, Differential and Integral Equations 25 (2012), 899--914. (査読有)

⑫ Tetsutaro Shibata, Asymptotic behavior of bifurcation curve for sine-Gordon type differential equation, Abstract and Applied Analysis, Volume 2012 (2012), Article ID 753857, 16 pages. (査読有)

⑬ Kazuhiro Kurata, Kotaro Morimoto, Existence of spike patterns in a chemotaxis model with saturation, Discrete Conti. Dynam. System, 31(2011), 139--164. (査読有)

⑭ N. Ikoma, Kazunaga Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, Calc. Var. Partial Differential Equations, 40 (2011), 449--480. (査読有)

⑮ Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, Inverse Problems 27 (2011), 055003. (査読有)

⑯ Kazuhiro Kurata, Hiroshi Matsuzawa, Multiple stable patterns in a balanced bistable equation with heterogeneous environments, Applicable Analysis, 89(2010), 1023-1035. (査読有)

⑰ Kazuhiro Kurata, Existence of multiple stationary patterns to some reaction-diffusion equation in heterogeneous environments, 数理解析研究所講究録vol.1704, 「第6回生物数学の理論とその応用」, (2010), 195-202. (査読無)

⑱ J. Hirata, N. Ikoma, Kazunaga Tanaka,

Nonlinear scalar field equations in \mathbb{R}^N : mountain pass and symmetric mountain pass approaches, Topol. Methods Nonlinear Anal., 35, (2010), 253--276. (査読有)

⑲ Tetsutaro Shibata, Local structure of bifurcation curves for nonlinear Sturm-Liouville problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications 369 (2010), 583--594. (査読有)

⑳ Tetsutaro Shibata, Precise asymptotics of boundary layers for damped simple pendulum equations, Results in Mathematics 58 (2010), 105--118. (査読有)

[学会発表] (計 34件)

① Kazuhiro Kurata, Asymptotic behavior of eigenvalues of the Laplacian on a thin domain under the mixed boundary condition and its application, 京都数理科学研究所研究集会「偏微分方程式の解の幾何」2012年11月9日.

② Kazunaga Tanaka, Multi-bump positive solutions for a nonlinear elliptic problem in expanding tubular domains, The International Conference on Variational Methods, The Chern Institute of Mathematics at Nankai University, China. 2012年5月21日-25日.

③ Kazunaga Tanaka, Multi-bump positive solutions for a nonlinear elliptic problem in expanding tubular domains, "Singular limit problems in nonlinear PDEs", CIRM Luminy, France. 2012年11月26日-30日.

④ Shuichi Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, Nonlinear partial differential equations, dynamical systems and their application, RIMS. 2012年9月3日-6日.

⑤ 神保秀一, 弾性体方程式の固有値に関する特異摂動問題, 研究集会『第8回非線型の諸問題』, 宮崎県婦人会館. 2012年9月11日-13日.

⑥ Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation problems for nonlinear elliptic equations, Analysis Seminar, University of Siena, Siena, Italy. 2012年1月11日.

⑦ Tetsutaro Shibata, 非線形楕円型方程式の固有値問題 I, II, 第4回福島楕円型・放物型微分方程式研究集会(福島大学)2012年1月27日-28日.

⑧ Tetsutaro Shibata, Inverse spectral problems for semilinear elliptic equations, 偏微分方程式の最近の話題 2012 in 別府 (研究集会)(別府国際コンベンションセンター)2012年3月19日.

⑨ Tetsutaro Shibata, Inverse bifurcation

problems for non-autonomous semilinear Sturm-Liouville equations, 偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究(研究集会)(京都大学数理解析研究所) 2012年11月20日.

⑩ Kazuhiro Kurata, Existence of multiple spike stationary patterns in a chemotaxis model with weak saturation, SIAM Conference at San Diego, USA. 2011年11月17日.

⑪ Kazuhiro Kurata, On a structure of stationary solutions to a nonlinear nonlocal elliptic PDE arising in the Ohmic heating problem, One Forum Two Cities: Aspects of nonlinear PDEs, 国立台湾大学, 台湾. 2011年9月1日.

⑫ Kazuhiro Kurata, On a structure of stationary solutions to a nonlinear nonlocal elliptic PDE arising in the Ohmic heating problem, 2011 International Workshop on Nonlinear PDE and Application, 国立釜山大学, 韓国. 2011年6月24日.

⑬ Shuichi Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, INdAM workshop on Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, Cortona, Italy. 2011年6月20日-24日.

⑭ Tetsutaro Shibata, Local Behavior of Bifurcation Curve for Nonlinear Sturm-Liouville Problems, 11 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, Department of Mathematics, Pusan National University, Pusan, Korea. 2011年6月21日-24日.

⑮ Tetsutaro Shibata, Spectral asymptotics for inverse nonlinear Sturm-Liouville problems, 北九州地区における偏微分方程式研究集会(研究集会)(九州工業大学) 2011年11月26日.

⑯ 半線形シュレディンガー方程式の定在波解の存在・安定性とリアレンジメント不等式, OCAMI 楕円型方程式研究集会, 大阪市立大学. 2011年8月11日.

⑰ Kazuhiro Kurata, 環境変動がある反応拡散方程式の進行波解の存在問題に関する変分的アプローチについて, 洞爺解析セミナー, 洞爺湖. 2010年9月29日.

⑱ Kazunaga Tanaka, A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations, RIMS 研究集会「孤立波の安定性と変分問題」, 埼玉大学理学部数学科. 2010年1月12日-14日.

⑲ Shuichi Jimbo, Singular perturbation of domains and the characterization of the behavior of the eigenvalues in several elliptic operators, 2010 NCTS workshop on Calculus of Variation and related topics,

National center for theoretical sciences, National Tsinghua Univ. China. 2010年5月6日-8日.

⑳ Tetsutaro Shibata, Asymptotics of solutions and inverse bifurcation problems for nonlinear Sturm-Liouville problems, 8-th AIMS international conference on dynamical systems, differential equations and applications, Dresden University of Technology, Germany. 2010年5月25日-28日.

他 14 件

[その他]
ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/tmu-kurata/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

倉田 和浩 (KURATA KAZUHIRO)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10186489

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

田中 和永 (TANAKA KAZUNAGA)
早稲田大学・大学院理工学術院・教授
研究者番号: 20188288
神保 秀一 (JIMBO SHUICHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 80201565
柴田 徹太郎 (SHIBATA TETSUTARO)
広島大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 90216010
柴田 将敬 (SHIBATA MASATAKA)
東京工業大学・理工学研究科・助教
研究者番号: 90359688