

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 23 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540206

研究課題名(和文) 複素領域での非線型偏微分方程式の解の特異点の研究

研究課題名(英文) A STUDY OF SINGULARITIES OF SOLUTIONS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE COMPLEX DOMAIN

研究代表者

田原 秀敏 (TAHARA, Hidetoshi)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60101028

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：複素領域での非線型偏微分方程式の解とその特異点を研究し、次の成果を得た。(1) 特異点を持つ多くの非偏微分方程式に対して解の存在と一意性を証明した。(2) 一階のブリオ・ブーケ型非線型偏微分方程式で特性指数が正整数の時に、超曲面上でのすべての解の特異点を完全に決定した。(3) 非コワレウスキー型非線型偏微分方程式の発散形式解のボレル総和可能性を証明した。(4) ラプラス・ボレル変換の q -類似の研究を行い、それを q -差分偏微分方程式に応用した。

研究成果の概要(英文)：We studied solutions and their singularities of nonlinear partial differential equations in the complex domain, and obtained the following results. (1) We proved the existence and the uniqueness of the solution of nonlinear partial differential equations of various types. (2) In the case of Briot-Bouquet type partial differential equations with a positive integral characteristic exponent, we determined all solutions which have singularities on a hypersurface. (3) We proved the multisummability of formal solutions to linear partial differential equations of non-Kowalevskian type. (4) We studied q -analogues of Laplace and Borel transforms, and applied it to linear q -difference partial differential equations.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：偏微分方程式 複素領域 正則解 特異点 形式解 ボレル総和法

1. 研究開始当初の背景

複素領域での常微分方程式の特異点の基礎理論は、20世紀初頭に一応の完成を見た。以来、複素領域での特異点と微分方程式の関わりは、数学のあらゆる分野に陰に陽に顔を出しつつ、現代に至っている。また、その基礎理論は、数学や物理などの多くの分野で基本言語の一つとして活用されている。しかし、偏微分方程式の枠組みの中に目を向けてみると、それに対応する研究は今までに十分なされてきた、とは言い難い。多変数の複素領域で、「特異点と偏微分方程式の関わりを研究する」ことは、これからの数学のなすべき最も大きなテーマのひとつであると思われる。

2. 研究の目的

本研究は「複素領域での特異点と微分方程式の関わりを現代数学の立場から捉えなおし、それをベースにして、多複素変数の偏微分方程式の枠組みの中で、解と特異点の体系的な理論を構築する」という長期計画で進めている研究の一環として位置づけられるものである。具体的には、複素領域での非線型偏微分方程式に対し、方程式の特異点の近傍での解の構成を行い、その解に現れる特異点の様子を研究し、特異点の全体像を明らかにすることを目的とした。

3. 研究の方法

まず、特異点を持つ非線型偏微分方程式に対して、解の存在と一意性を示す。次に、いわゆる「Fuchsian reduction」と呼ばれる方法で、特異点を持つ解の構成問題を、特異点を持つ非線型偏微分方程式の可解性の問題に帰着する。結果として、特異点を持つ解が構成される。全ての解の決定には、「カップリング方程式の手法」を使って、方程式の標準形を求め、その標準形の解をすべて決定する、というプロセスで実行する。形式解は構成出来るが、それが発散級数になっている場合には、Ecalte, Ramis, Balser 達による、ボレル総和法の手法を適用する。

4. 研究成果

(1) 非線型偏微分方程式の解のジェヴレイクラスでの正則性の研究を行なった。非コワレウスキー型の非線型偏微分方程式に対して、極めて一般的な条件のもとで解の正則性が示された。同時に、形式的べき級数解に対する形式的なジェヴレイクラスでの正則性の結果と比較して、正則性のクラスに若干の相違が現れることを見出した。従来は、両者のクラスは同じであろうと予想されていた。(論文)

(2) 一階の非線型偏微分方程式で、時間変数については連続、空間変数については正則な方程式に対して、解の一意存在を示した。まず、Lope 氏、Roque 氏 と共同で、プリオ・

ブーケー型の方程式に対して解の一意存在を示した。次に、Bacani 氏と共同で、空間変数について確定特異点を持つケースに解の一意存在を示した。更に、空間変数について不確定特異点を持つ場合にも、解の一意存在を証明した。(論文)

(3) 一階の正則な非線型偏微分方程式で、プリオ・ブーケー型の方程式の標準形を求める問題は、特性指数が正整数の時は未解決のまま残されていた。これを解決し、特性指数が正整数の時のすべての特異点を決定することに成功した。(論文)

(4) 非コワレウスキー型の線型偏微分方程式の初期値問題には、しばしば、発散する形式的べき級数解が出てくる。山澤浩司氏と共同で、「初期値が整関数の時には、適当なクラスで、発散級数解を漸近展開にもつ真の解が構成出来る」ことを示した。証明は、ボレル・ラプラス変換をベースにした多重ボレル総和法の議論を使った。(論文)

(5) ラプラス・ボレル変換の q -類似と q -差分偏微分方程式の研究を行った。適当な条件を満たす q -差分偏微分方程式の形式的べき級数解に対して、それが、Ramis-Zhang の意味で q -ボレル総和可能であることを示した。また、ラプラス・ボレル変換の新しい q -類似の構成にも成功した。(学会発表)

(6) 時間変数と空間変数の両方について確定特異点を持つ解析的な非線型偏微分方程式の形式的べき級数解の収束性の研究を行った。一般化されたポアンカレ条件を導入し、そのもとで「すべての形式的べき級数解が常に収束する」ことを示した。結果として、多くの新しい方程式に対して、正則解の一意存在が示された。(学会発表)

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計13件)

D. B. Bacani and H. Tahara, Unique solvability of some nonlinear partial differential equations with Fuchsian and irregular singularities, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有、Vol. 66、2014、pp. 1017-1042

H. Tahara, On a reduction of nonlinear partial differential equations of Briot-Bouquet type, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有、Vol. 36、2013、pp. 539-570

H. Tahara and H. Yamazawa, Multisummability of formal solutions to the Cauchy problem for some linear partial

differential equations、Journal of Differential Equations、査読有、Vol. 255、2013、pp. 3592 - 3637

D. B. Bacani and H. Tahara、On existence and uniqueness theorems for singular nonlinear partial differential equations、RIMS Kokyuroku Bessatsu、査読有、B40、2013、pp. 69-79

H. Tahara、Time regularity in Gevrey classes of solutions to general nonlinear partial differential equations、RIMS Kokyuroku Bessatsu、査読有、B40、2013、pp. 119-136

H. Tahara、Coupling of two singular partial differential equations and its application、RIMS Kokyuroku Bessatsu、査読有、B37、2013、pp. 193-202

H. Tahara and H. Yamane、Nonlinear partial differential equations and logarithmic singularities、RIMS Kokyuroku Bessatsu、査読有、B37、2013、pp. 203-209

H. Tahara and H. Yamazawa、Maillet type theorem, convolution equations and multisummability of formal solutions、数理解析研究所講究録、Vol. 1861、2013、pp. 171-182

H. Tahara、Maillet type theorem and Gevrey regularity in time of solutions to nonlinear partial differential equations、Banach Center Publications、査読有、Vol. 97、2012、pp. 125-140

D. B. Bacani and H. Tahara、Existence and uniqueness theorem for a class of singular nonlinear partial differential equations、Publications of Research Institute of Mathematical Sciences、査読有、Vol. 48、2012、pp. 899-917

J. E. C. Lope, M. Roque and H. Tahara、On the unique solvability of certain nonlinear singular partial differential equations、Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen、査読有、Vol. 31、2012、pp. 291-305

H. Tahara、Gevrey regularity in time of solutions to nonlinear partial differential equations、Journal of the Mathematical Sciences, the University of Tokyo、査読有、Vol. 18、2011、pp. 67-137

H. Tahara、On the singularities of solutions of nonlinear partial

differential equations in the complex domain、数理解析研究所講究録、Vol. 1723、2011、pp. 101-109

〔学会発表〕(計17件)

田原秀敏、ラプラス・ボレル変換の q -類似と q -差分方程式への応用、2015年度日本数学会年会・函数解析学分会・特別講演、2015年3月21日、明治大学駿河台キャンパス(東京都・千代田区)

田原秀敏、Generalized Poincare condition and convergence of formal solutions of some nonlinear totally characteristic equations、研究集会「大阪梅田微分方程式セミナー」、2015年2月21日、関西学院大学大阪梅田キャンパス(大阪府・大阪)

田原秀敏、 q -Analogues of Laplace and Borel transforms with application to q -difference equations、RIMS 研究集会「複素領域における微分方程式 - その近年の発展 -」、2014年11月21日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都)

田原秀敏、 q -Analogues of Laplace and Borel transforms by using q -exponentials、RIMS 研究集会「超局所解析の諸相」、2014年10月21日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都)

H. Tahara、 q -Analogues of Laplace and Borel transforms with application to q -difference equations、Conference「Formal and analytic solutions of functional equations」、2014年9月2日、Valladolid (Spain)

田原秀敏、 q -Analogue of the summability of formal solutions of some linear q -difference equations、研究集会「広島大学微分方程式セミナー：漸近解析とボレル総和法」、2014年3月5日、広島大学東広島キャンパス(広島県・東広島)

田原秀敏、On q -analogues of Laplace and Borel transforms by using Jacobi theta function、研究集会「代数解析学と局所凸空間」、2014年2月17日、日本大学駿河台キャンパス(東京都・千代田区)

H. Tahara、On q -analogues of Laplace and Borel transforms by Jacobi theta function Japan-Polish workshop「Global study of differential equations in the complex domain」、2013年9月4日、Warsaw (Poland)

H. Tahara、Summability of formal solutions to the Cauchy problem for some

linear partial differential equations、Conference「Formal and analytic solutions of differential, difference and discrete equations、2013年8月29日、Bedlewo (Poland)

田原秀敏、山澤浩司、Maillet type theorem, convolution equations and multisummability of formal solutions、RIMS 研究集会「超局所解析と漸近解析の最近の進展」、2012年10月26日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都)

田原秀敏、山澤浩司、Summability of formal solutions of some linear partial differential equations、2012年度日本数学会秋季総合分科会、2012年9月18日、九州大伊都キャンパス(福岡県・福岡)

H. Tahara、Maillet type theorem, convolution equations and multisummability of formal solutions、French-Chinese School of Differential and Functional Equations、2012年4月24日、Wuhan (China)

田原秀敏、Maillet type theorem and Gevrey regularity in time of solutions to nonlinear partial differential equations、RIMS 研究集会「漸近解析に於ける超局所解析の展望」、2011年11月17日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都)

H. Tahara、Maillet type theorem and Gevrey regularity in time of solutions to nonlinear partial differential equations、Banach Center Conference「Formal and Analytic Solutions of Differential and Difference Equations, II」、2011年8月11日、Bedlewo (Poland)

H. Tahara、Coupling of two partial differential equations and its application、UP Mathematics Centennial Conference、2010年10月21日、Diliman (Philippines)

H. Tahara、Coupling of two partial differential equations and its application、International Conference「New Directions in Analysis」、2010年08月09日、Hanoi (Vietnam)

田原秀敏、複素領域での非線型偏微分方程式の解の特異点について、RIMS 共同研究「経路積分と超局所解析の入門」、2010年5月26日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都)

(1)研究代表者

田原 秀敏 (TAHARA Hidetoshi)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：60101028