

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年2月25日現在

機関番号：	35302
研究種目：	基盤研究(C)
研究期間：	2010～2012
課題番号：	22540211
研究課題名（和文）	積分方程式に対する解半群およびその周辺の研究
研究課題名（英文）	Study of the solution semigroup for integral equations and related topics
研究代表者	
村上 悟	(MURAKAMI SATORU)
岡山理科大学・理学部・教授	
研究者番号：	40123963

## 研究成果の概要（和文）：

積分方程式の解に対する定性的性質を中心に研究を行った。実際、線形方程式に付随する解作用素の生成素に対してスペクトル解析を行い、本質的スペクトルの半径に関する評価を得た。さらに、非同次方程式に対して相空間における解の表現公式を確立した。これらの結果を融合して応用することにより、有界解や周期解などの存在に関するマッセラ型の定理を確立し、さらに、非線形方程式に対し線形化原理を導いて解の安定性解析への有効な手法を確立した。

## 研究成果の概要（英文）：

We studied some qualitative properties of solutions in integral equations. Indeed, for linear integral equations we analyzed some spectral properties for the generator of the associated solution semigroup, and obtained an estimate on the essential spectral radius of the generator. Furthermore, we established a representation formula in the phase space for solutions of nonhomogeneous linear equations. Applying these results, we obtained Massera type results on the existence of bounded solutions, periodic solutions and so on. Also, for nonlinear integral equations we established the principle of linearization which is effectively applicable to stability problems in nonlinear equations.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 積分方程式、解半群、スペクトル、定数変化法の公式、安定性

### 1. 研究開始当初の背景

積分方程式に対して、Gripenberg, Londen, Staffans 等により実解析的アプローチによる研究がなされており、解の定性的性質に関する結果が数多く導かれている。さらに、Diekmann と Gripenberg による最近の共著のプレプリント（その後、論文として2012年に学術雑誌 *Journal of Differential Equations* に公表された）では生態系モデルの数学的解析の研究との関連で無限時間遅れをもつ積分方程式が扱われ、実解析的アプローチによる研究結果を適用して線形化原理等の基礎的結果が導かれている。しかし、関数解析的アプローチによる解半群の解析、および解の表現公式の確立等の研究はなされておらず、積分方程式に対するこの方向での研究の着手・進展が大いに期待される場所である。実際には、時間遅れをもつ方程式の代表例である関数微分方程式に対しては、方程式に含まれる「微分可能性」が解析を可能にし、関数解析的手法による研究が統一的になされている。他方、積分方程式においては、「微分可能性」を有しないことが本質的支障となって関数微分方程式と類似の論法を直接的には適用し得ない背景がある。

### 2. 研究の目的

積分方程式に対して関数解析的手法を取り入れて解の定性的研究を行うことを目的とする。具体的には、積分方程式に対し解半群およびその生成素のスペクトル解析を行い、生成作用素のスペクトルに対応する相空間の分解、および各分解成分上での解半群の漸近評価式を確立する。また、非斉次線形方程式に対し、相空間における解の表現公式を確立し、有界解の存在条件やマッセラ型の周期解・概周期解の存在定理を導く。さらには、非線形方程式に対するいくつかの不変多様体に関する存在定理を導き、必ずしも自励的でない積分方程式に対する線形化原理を確立する。

### 3. 研究の方法

無限の時間遅れをもつ積分方程式に対して、初期関数からなる空間（相空間）を適切に選び、与えられた初期関数から出発する解の定性的性質を総合的に研究する。そのために、これまでに関数微分方程式や関数差分方程式に対して開発された手法を積分方程式の研究に適用し得るように改良し、いくつかの解析学分野における専門的知識を多角的に利用して研究を進める。具体的には、関数解析学における線形作用素のスペクトル論

的手法を中心に、関数方程式論におけるいくつかの標準的手法を利用する。また、複素解析的方法と関数解析的手法を融合させて、線形積分方程式に対する解半群の生成素の解析および特性方程式の根の分布状況等を研究する。さらに、積分方程式などの方程式に対し、中心多様体や安定多様体などいくつかの不変多様体に対する解析的かつ幾何学的考察、および、解の漸近挙動と振動性の解析を行う。

### 4. 研究成果

研究代表者および4名の分担者は積分方程式を中心に、ボルテラ差分方程式などいくつかの型の方程式に対する研究を行い、以下に述べる研究成果を得た。

#### (1) (積分方程式に関して：)

積分方程式に対する解の表現公式（相空間における定数変化法の公式）の確立とその応用を中心に研究をした。具体的には、線形積分方程式において、その線形部分に対応して得られる解作用素半群およびその生成素のスペクトルの特徴づけ、および本質的スペクトル半径に対する評価式を導いた。また、相空間における解の表現公式を証明し、相空間の直和分解に対応する解の表現の分解公式を導くことにより積分方程式の定性的研究への基礎的手法を確立した。この手法を、スペクトルが数直線内の一つの閉部分集合に属すものからなる関数空間に対しての許容性の問題に応用し、自然な形で結果を得た（発表論文 ①）。この手法の更なる応用として、(非自励的)非線形項をもつ積分方程式を扱い、線形化原理（安定性定理および不安定性定理）の確立に成功した（発表論文 ③）。

#### (2) (ボルテラ差分方程式に関して：)

積分方程式の離散版の方程式であるボルテラ差分方程式を扱い、ある双線形形式を導入して形式的随伴作用素論を展開することにより、解作用素のスペクトルに付随して導かれるある部分空間への射影作用素を明確な形で表すことに成功し、結果を解の漸近挙動の解析に応用した（発表論文 ②）。

ボルテラ差分方程式に関する知見を基に、積分方程式に関するこの方向での研究にも着手し、積分方程式に対する射影作用素の明確な表現公式の確立に成功している。また、積分方程式に対する射影作用素の具体的表現を活用して、積分方程式

に対する中心多様体論の展開および安定性解析への応用にも成功している (学会発表 ①). これらの結果を論文として公表する予定で準備中である.

(3) (積分微分方程式等に関して:)

無限次元空間上で定義された積分微分方程式に対して、方程式に含まれている係数作用素を用いて正值性の特徴づけを行った。また、正值方程式の漸近安定性についての特徴づけをよりチェックし易い式で表した。さらに、安定性を保存する摂動の大きさ (安定半径) に関する研究を行い、有限次元方程式に対する結果の一般化を導いた。得られた結果を拡散項をもつ積分微分方程式の安定性解析に応用した (発表論文 ⑤)。また、抽象的な関数微分方程式に対し、解の安定性および概周期解の存在定理に関する結果を導いた (発表論文 ④)。さらに、複素双曲三角群に関するいくつかの結果とともに、関連する特記事項についての指摘をし (発表論文 ⑦)、また、Emden-Fower 型微分方程式の 2 点境界値問題に対し、ある条件の下で正值解の一意性に関する結果を導いた (発表論文 ⑥)。これらの知見を基に、この方向での積分方程式に対する研究の深化が期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① H. Matsunaga, S. Murakami and N.V. Minh, Decomposition and variation-of-constants formula in the phase space for integral equations, Funkcial. Ekvacioj, 査読有、Vol.55, (2012), pp.479—520.

② H. Matsunaga, S. Murakami, Y. Nagabuchi and Y. Nakano, Formal adjoint equations and asymptotic formula for solutions of Volterra difference equations with infinite delay, J. Difference Equations and Applications, 査読有、Vol.18, (2012), pp.57—88.

③ H. Matsunaga, S. Murakami and N.V. Minh, Stability and instability linearization for integral equations, RIMS Kokyuroku, 査読無、Vol. 1786, (2012), pp.66—84.

④ Y. Hamaya, Stability properties and almost periodic solutions of abstract functional differential equations with infinite delay, Libertys Mathematica, 査読有、Vol.16, (2011), pp.93—102.

⑤ S. Murakami and P.H.A. Pham, On stability and robust stability of positive linear Volterra equations in Banach spaces, Central European Journal of Math., 査読有、Vol.8, (2010), pp.966—984.

⑥ S. Tanaka, On the uniqueness of positive solutions for two-point boundary value problems of Emden-Fower differential equations, Mathematica Bohemica, 査読有、Vol.135, (2010), pp.189—198.

⑦ S. Kamiya, Notes on complex hyperbolic triangle groups, Conformal Geometry and Dynamics, 査読有、Vol.14, (2010), pp.202—218.

[学会発表] (計 3 件)

① S. Murakami, Center manifold theorem for integral equations, 研究集会「常微分方程式の大域的理論とその応用」、2012年11月9日、京都大学数理解析研究所。

② S. Murakami, Linearized stability and instability principle for integral equations, 研究集会「関数微分方程式の定性的理論の新展開」、2012年11月10日、京都大学数理解析研究所。

③ S. Murakami, 線形積分方程式に対する解半群のスペクトルの性質、双線形式および解の漸近公式, 研究集会「微分方程式の定性的理論ワークショップ in 岡山理大」、2011年1月23日、岡山理科大学25号館。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村上 悟 (MURAKAMI SATORU)  
岡山理科大学・理学部・教授  
研究者番号: 40123963

(2) 研究分担者

濱谷 義弘 (HAMAYA YOSHIHIRO)

岡山理科大学・総合情報学部・教授  
研究者番号：40228549

長瀬 裕 (NAGABUCHI YUTAKA)  
岡山理科大学・理学部・教授  
研究者番号：60252607

神谷 茂保 (KAMIYA SHIGEYASU)  
岡山理科大学・工学部・教授  
研究者番号：80122381

田中 敏 (TANAKA SATOSHI)  
岡山理科大学・理学部・准教授  
研究者番号：90331959

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：