

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 23 日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540212

研究課題名(和文) 2次元複素双曲三角群の離散性に関する研究

研究課題名(英文) Studies on 2-dimensional complex hyperbolic triangle groups

研究代表者

神谷 茂保 (KAMIYA, Shigeyasu)

岡山理科大学・工学部・教授

研究者番号：80122381

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：2次元複素双曲空間に等長変換群として作用する $(n, n, \infty; k)$ 型の複素双曲三角群を考察し、複素双曲版Jorgensenの不等式、および三角関数のディオファントス方程式に関するConway-Joneの結果などを用いて非離散的な $(n, n, \infty; k)$ 型の複素双曲三角群の新しいリストを得た。特に $n > 21$ の時はすべて非離散的になることを示した。また10個の離散的な $(n, n, \infty; k)$ 型の複素双曲三角群を見出した。

研究成果の概要(英文)：We discuss complex hyperbolic triangle groups of type $(n, n, \infty; k)$ and obtain a new list of non-discrete groups. In particular, we show that if $n > 21$, then complex hyperbolic triangle groups of type $(n, n, \infty; k)$ are non-discrete. Also we find 10 discrete complex hyperbolic triangle groups of type $(n, n, \infty; k)$.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素双曲三角群 複素双曲空間 離散群

1. 研究開始当初の背景

実双曲空間に作用するクライン群などの研究はリーマン面の研究と相まって発展してきた。特に 1964 年の極限集合に関する Ahlfors 予想に始まり、1970 年代の Bers, Maskit, Kra などによるクライン群の変形空間の研究、Marden による 3 次元のクライン群の研究、Riley の研究から生じた Thurston の壮大な研究と予想などに導かれて発展してきた。現在では多くの予想が解決し実双曲空間に作用するクライン群などの研究は新たな研究方向の模索の時代になってきている。それに比べ複素双曲空間に関する研究は実双曲空間の研究に勝るとも劣らない豊富な研究対象であるにもかかわらず未だ十分に進展しているとはいえない状況である。複素双曲空間に関連する研究分野は未開拓な研究対象である沃野が広がっていると思われるがこれらの非常に複雑さが研究を困難なものにしている。実際、複素双曲空間に作用する等長変換群の研究も十分に研究がなされているとはいえない。実双曲空間に作用するクライン群の理論をアナロジーとしてそのまま拡張することは不可能であり、複素双曲空間に作用する離散的な変換群を見つけ出すことも難しい。実際、離散的な等長変換群の例も多く知られているわけではない。そこで対象を 2 次元複素双曲空間に作用する 3 つの complex geodesics を固定する 3 つの involution から生成される複素双曲三角群に制限しその中から新しい離散群を見つけ出すことが当面の目標となった。1990 年代に Goldman と Parker が $(n, n, \infty; k)$ 型の理想複素双曲三角群の離散性に関する研究を始めた。この研究は 1980 年の Mostow の先駆的な研究の続きということになるが長い中断があった。神谷は複素 1980 年代より複素双曲空間に作用する $PU(1, n; C)$ の離散部分群をフックス群の一般化として研究を行い辻正次らの結果の拡張を行った。1990 年代半ばにアメリカ数学会 (オクラホマ州立大学) において初めて関連分野の研究者が集まり研究交流を行った。その後、岡山、ワシントン、マルセイユなどでの研究集会を通して研究を深めてきた。Schwartz の研究により複素双曲三角群が 3 次元多様体などとも密接に関連した非常に重要な群であることが知られてきた。これらの研究に伴い複素双曲空間及びそこに作用する群に関心を持つ研究者の数も増えてきた。しかし明確になっていない部分、未開拓の部分が多く存在しているというのがこの分野の研究者の間の共通の認識である。近年、各地で複素双曲空間関連の研究集会が開催されるようになってきた。また若い研究者対象の研究集会などもいくつか企画されてきた。この結果、この分野への関心も深まり、特にフランス、中国、韓国などでもこの研究が盛んに行われるようになってきた。

2. 研究の目的

2 次元複素双曲空間に作用する離散的な複素双曲三角群を見つけ出すことである。特に $(n, n, \infty; k)$ 型複素双曲三角群の離散性 (非離散性) を分類するリストを作り上げることが目標である。

3. 研究の方法

(1) 離散性を判定するためには複素双曲版ポアンカレの定理を用いるのが一般的であるが bisector でさえも非常に複雑であり基本領域の候補を作成するのはやさしくない。他にも hybrid cone などでも考えることができる場合もある。まず組み合わせ的な方法で基本領域の候補をつくりそれを詳細に調べることになる。この方法によりいくつかの群について性質を知ることができたが一般的な方法の開発はまだできていない。

(2) 離散的な群は多くないと思われるのでまず非離散的な群を見つけどこを探せば離散的な群が見つかるかを調べる必要がある。非離散性を調べるには複素双曲版 Jorgensen の不等式をつくり応用する方法がある。また楕円型の元を見つけ Conway-Jones の三角関数に関するディオファントス方程式に関する結果を応用しその位数が無限になることを確かめる方法もある。

(3) 2 元生成のフックス群はどのようなものになるかは知られているので、対象の複素双曲三角群が 2 次元全測地的全実部分空間を不変にするような部分群を含む場合はこのフックス群のリストにより離散性を判定することも可能である。しかし具体的に該当する部分群を見つけ出すことは容易ではない。

4. 研究成果

(1) 新たに開発した Jorgensen の不等式を応用し、 $n > 21$ の時 $(n, n, \infty; k)$ 型複素双曲三角群はすべて非離散的になることを示した。これは $n > 28$ の時 $(n, n, \infty; k)$ 型の複素双曲三角群はすべて非離散的になるという以前得た結果を改善したものである。また特別な楕円型の元の位数を調べることにより新たに 6 つの非離散型の群を見出した。群の要素が特別な離散的な環に属していることを考察することにより 10 個の離散的な群をみつけた。

(2) 神谷の結果と Parker の結果を見比べることにより複素双曲三角群の表示の仕方は一意的ではないことを確認し、同型な群の表示について検討した。複素双曲三角群の生成元の基本的な取り換えによる表示の変形を考え基本的な性質を見出しえた。また表示の変形を繰り返した場合、lattice (有限な体積の基本領域を持つ離散的な群) の時は有限回で変形が止まるのに対し lattice ではない時は有限回の変形では止まらず無限に変形

することが可能になるようないくつかの例を観察した。またこれらの変形に伴う2つの普遍量を見つけた。この2つの普遍量が群を決定するように思われるがこれについては未解決である。

(3) $p \leq q \leq r$ を満たす $(p, q, r, ;k)$ 型の複素双曲三角群において以前開発した楕円型の元に関する複素双曲版 Jorgensen の不等式応用し、 $p > 31$ の時は非離散的な群になることを示した。

(4) 今までに知られている離散的な $(n, n, ;k)$ 型複素双曲三角群について整理しリストにした。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

S.Kamiya:

Note on non-discrete complex hyperbolic triangle groups of type $(n, n, ;k)$,
Proc. Japan Academy, SerA, 89, (2013),
100-102. (査読有り)
<http://dx.doi.org/10.3792/pjaa.89.100>

M.Yamasaki:

On controlled assembly maps,
RIMS Kokyuroku Bessatsu, B39, (2013),
197-214. (査読有り)

S.Kamiya, J.R.Parker and

J. Thompson:
Non-discrete complex hyperbolic
triangle groups of type $(n, n, ;k)$,
Canad. Math. Bull., 55 (2), (2012),
329-338.
(査読有り)
<http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2011-094-8>

H.Matsunaga, S.Murakami and

Nguyen Van Minh:
Decomposition and variation-of-constants
formula in the phase space for integral
equations,
Funkcial. Ekvac., 55 (2012), no.3,
479-520.
(査読有り)
<http://dx.doi.org/10.1614/fesi.55.479>

H.Matsunaga, S.Murakami,

Y.Nagabuchi and Y.Nakano:
Formal adjoint equations and asymptotic
formula for solutions of Volterra
Difference equations with infinite delay,
J.Difference Equ. Appl. 18, (2012), no.1,

57-88. (査読有り)
<http://dx.doi.org/10.1080/10236198.2011.575070>

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups of type
 $(n, n, ;k)$,
Proc. of the 13th International conference
on Real and Complex Analysis,
Hiroshima Univ., (2011), 52-57. (査読なし)

S.Kamiya, J.R.Parker and

J. Thompson:
Notes on complex hyperbolic triangle
groups,
Conformal Geom. Dyn., 14, (2010), 202-218.
(査読有り)
<http://dx.doi.org/10.1090/s1088-4173.2010-0021>

S.Murakami and Pham Huu Anh Ngoc:

On stability and robust stability of
positive linear Volterra equations in
Banach Lattices,
Central European Journal of Mathematics,
vol.8, (2010), 966-984. (査読有り)
<http://dx.doi.org/10.2478/s11533-010-0061-0>

[学会発表](計 10 件)

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups,
「不動点とその周辺」研究集会、
奈良女子大学、2014年3月9日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups,
「リーマン面論の展望」研究集会、山口大学、
2013年12月6日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic geometry,
ポテンシャルセミナー、名城大学、
2013年11月29日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups,
“Analysis and Geometry of Discrete Groups
and Hyperbolic Spaces” 研究集会、
京都大学数理解析研究所、
2011年12月15日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups of type
 $(n, n, ;k)$,
Geometric and Topology Seminar,
National University of Singapore,
2011年3月2日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic spaces II,
Penang, Universiti Sains Malaysia,
2011年2月25日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic spaces I,
Penang, Universiti Sains Malaysia,
2011年2月24日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups,
Conference on Complex Analysis and
Discrete Groups, 早稲田大学、
2011年2月16日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups of type
($n, n, \quad ; k$),
関数論セミナー、大阪市立大学、
2011年1月27日

S.Kamiya:

Complex hyperbolic triangle groups,
The 13th Conference on Real and Complex
Analysis, 広島大学、
2010年12月21日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

神谷 茂保 (KAMIYA, Shigeyasu)
岡山理科大学・工学部・教授
研究者番号: 80122381

(2) 研究分担者

村上 悟 (MURAKAMI, Satoru)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 40123963
(2013年3月退職)

(3) 山崎 正之 (YAMASAKI, Masayuki)

岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 70174646