

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 28 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540217

研究課題名(和文)量子状態の遷移確率とその応用

研究課題名(英文)Transition probabilities between quantum states and their applications

研究代表者

山上 滋 (Yamagami, Shigeru)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：90175654

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：和基本的な量子代数であるCCR代数を考えると、その上の自由状態は、共分散形式と呼ばれるものによって識別される。自由状態間の量子遷移確率を共分散形式で書き表す行列式公式を用いることで、2つの自由状態から作られる量子代数の表現の物理的同値性について研究を行った。主な成果は2つあり、このような表現は同値であるか、遷移確率が零になるという意味で互いに素であるかのいずれかが起こること(角谷二分律)を確認した。ついで、平均値が零とならないコヒーレント状態間の遷移確率を、共分散形式による行列公式に平均値情報を付加する形で示した。

研究成果の概要(英文)：As a basic quantum algebra, we worked with the so-called CCR algebras and investigated their free states, which are known to be parametrized by covariance forms, from the view point of physical equivalence of the associated representations of quantum algebras. By fully utilizing our previous obtained determinant formula on the transition probability, we succeeded in establishing a quantum analogue of Kakutani dichotomy, which states that two representations arising from free states are physically equivalent unless they are disjoint in the sense that the transition probability vanishes between states. Moreover, the transition probability formula is further extended to coherent states, which are free states with non-trivial expectation values. The result is parallel to the case of free states with a term which evaluates expectation functionals by covariance forms being multiplied exponentially.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：量子状態 遷移確率

### 1. 研究開始当初の背景

量子代数としてここで問題とするのは、最も基本的である正準交換関係あるいは正準反交換関係によって生成されるCCR代数あるいはCAR代数についてである。生成元が有限であるか無限であるかによって有限自由度あるいは無限自由度と区別して扱われることが多い。

実際、有限自由度の場合には、既約表現の一意性が成り立ち、したがっていずれの量子代数も比較的単純な構造を有し、その解析は比較的容易である。

一方、無限自由度の場合には、そのような既約表現の一意性は成立しない。のみならず、既約分解の一意性が保証されない、いわゆる非I型と呼ばれる表現をもつものであることが知られている。そういった非I型表現というものは、特殊な病理的例ということではなく、量子統計物理の観点からも熱力学的平衡状態を記述する表現として、自然な形で出現する。とりわけ、自由状態およびそれから派生する準自由状態の生成する表現については、無限自由度代数の観点から詳しい研究がなされてきた。

一方で、近年めざましい発展を遂げている量子確率論の手法による解析は、この古くから存在する問題においても新たな知見をもたらすことが期待されている。

### 2. 研究の目的

本研究では、量子代数上の線型汎関数としての量子状態間の遷移確率をその対象とする。CCR代数上の準自由状態の場合に得られた明示的公式を、関連する量子代数および量子状態に一般化し、併せてテンソル圏における極限状態の遷移確率を作用素環の枠組みを利用した量子確率論により記述する。これにより、量子不変量ならびに部分因子環の構成に対する新たな視点の確立に向けた基礎の確立を目指す。

### 3. 研究の方法

CCR代数の準自由状態については、研究代表者による遷移確率の公式がすでに得られていた。

その具体的な形は、状態を識別するための共分散形式の幾何平均量に関するフレドホルム行列式を計算するというもので、2次形式とそれに関連した作用素解析の方法が適用するという特徴をもつものであった。

この公式は、付随した表現の相互関係を調べる上でも有用な形をしているので、とくに、遷移確率が消える場合の条件を、状態を識別する量である共分散形式の言葉で書きなおすことで、必要な情報に到達しうよう解析を進めた。

準自由表現の同値性の特徴づけに持っていくためには、まず、表現の準同値性を状態に対応するベクトルの言葉でいにかえる必要がある。これについては、研究代表者により研究がなされた非可換マルチンゲール収束の方法を用いた。

これは、量状態間の遷移確率を、部分量子代数に制限した状態間の遷移確率の極限として表すもので、無限自由度の系の解析を有限自由度のそれに帰着させようという点で有用なものであり、ここでも、遷移確率における近似解析において威力を発揮した。

このような手法を駆使することで、CCR代数の汎用表現空間の同値性について、共分散形式が退化部分をもつ例外的状況を除いて、遷移確率が零にならないという条件と同等であるという事実がわかるので、遷移確率公式から容易にヒルベルト・シュミット型の条件に書きなおすことができた。

一般の場合は、準自由状態を上る条件を満たす部分とそれ以外の部分に分解することで解析を進める。それ以外の部分はFock表現に還元されるはずのものであるので、分けて処理することで、目標に到達することを得た。

その例外的な場合も含めて、結果全体を通常の確率論の枠組みで知られているガウス測度の同値性に関する角谷の判定条件との比較を子細に行うことで、非可換確率過程としての側面も明らかにすることができる。

次に、準自由状態に関する以上の知見を、共分散形式の他に平均値形式が零とならない場合にも拡張することを試みた。

こちらは、遷移確率公式がまだ確立していなかったこともあり、そこから研究を始める必要があった。

この場合も、非可換マルチンゲール収束定理による近似の議論が有効であり、共分散形式に付随した二次形式に関する行列式量の他に、二次形式によって平均値形式をベクトルに転換したものの、二次形式による値による因子が新たに付け加わることが判明したので、その部分の収束性の議論を精密に行った。

以上は、CCR代数に関する研究であるが、密接に関係する量子代数としてCAR代数についても考察の対象を広げ、とくに、CCR代数の解析と類似の結果がどの程度可能であるかについて調べた。

こちらは、CAR代数の専門家でもある、九州大学の松井卓氏と、複数回に亘って、討論することで、考察すべき問題点を絞り、併せて既存の研究成果についての情報交換を通じて、とくに表現の同値性についての異なる様相について分析を行った。

#### 4. 研究成果

(1) CCR 代数の準自由表現の同値性を状態間の遷移確率公式と結びつけて解析を行うことで、期待通りの結果が確認されたのであるが、その内容のまとめ方で、無限直積測度に関する角谷の二分律 (dichotomy) と類似の形のものを得ることができた。

その内容であるが、2つの自由状態から生成される作用素代数は、同型であるか、同型な部分をまったく含まないか、のいずれかであること (角谷二分律)。さらに、この2つの場合が、自由状態間の遷移確率の有無、すなわち、遷移確率が正であるか否か、で判定できること。後者は、無限直積測度に対する角谷の判定法と類似のものではあるが、これまで知られていなかったものである。

これらの結果の証明の段階で、状態を識別する際に使われた密度作用素の正数べきが、定数倍を除いて、別の自由状態の密度作用素に一致するという、謎の現象にも遭遇した。

その物理的・数学的意味は不明であるが、今後の研究のための重要な手がかりの一つであるものと思われる。

ついで、CAR 代数の場合の同様の結果が成り立つかどうかについても調べた。この場合は、ほとんどすべての自由状態が因子環という分割不分解性を有する作用素代数を生成することが知られており、二分律そのものは成り立つものの、自明に近いものになっている。ただし、CAR 代数の形としてクリフォード代数形式を採用すると、例外的な場合ではあるが、因子環とはならない場合が出現し、二分律の存在を確かめることに意味があることが、研究協力者の一人である松井卓氏との共同研究で明らかになった。

また、この非因子環性に関連した話題として、自由状態を偶代数部分に制限した場合に二分律が成立しない現象についても、その詳しい情報を得ることができた。

(2) コヒーレント状態についての遷移確率公式が、既に確立している準自由状態の場合のそれを踏襲する形で決着を見た。

得られた公式そのものは、既に得られたものの自然な拡張となっているのであるが、その証明には、無限自由度固有の解析が必要であり、関数解析的な近似の議論を重ねることで達成することができた。

こうして得られた公式が成り立つ状況設定はきわめて一般的であり、とくに正準交換関係に関わる交代形式が完全に退化した場合には、よく知られたガウス測度の場合に帰着するのであるが、そうしたある意味古典的な場合に於いても今回得られた公式は新規性を有しているものと思われ、今後の応用が見込まれる。具体的には、角谷二分律のコヒーレント状態への拡張が比較的容易に達成できることを確認できた。それ以外に、コヒーレント表現の

間の同値性の判定条件、さらには、ゲージ作用で不変な部分代数へ制限した場合の表現の構造がどのように変化するかについての知見も得ることができた。

(3) 最後に、テンソル圏についてのものであるが、最近注目を集めている Jones の planar algebra と  $C^*$ テンソル圏との関係を、多重圏の線型表現を仲立ちとして明らかにした論文を arXiv:1207.1923 として公開することができた。

具体的には、planar diagram の作る多重圏の線型表現として planar algebra を記述する一方、このような多重圏と生成元を伴ったモノイダル圏との間の同値性を確立することで、planar algebra と単生成テンソル圏が同等の情報を有することを明らかにした。

さらに解析的なテンソル圏の可能性を探るために、物理的に重要である相対論的対称性を記述する Poincare 群のユニタリー既約表現のうち、因果関係を保つ場合について、2つの表現のテンソル積がいかに既約分解されるかについての詳細な分析を行った。

結果そのものに関しては、A.S.Wightman による報告が 1960 年代になされていたものではあるが、その証明および計算の詳細については、文献からは失われた状態になっていたものである。唯一、L.Pukanzky による、正質量かつ整数スピンの場合の証明が論文として公表されたものすべてである状況に鑑みて、今回の再証明は十分意味のあることであると、思われる。

さらに、非相対論的近似を与えると目されている Galilei 群の既約表現が Poincare 群の既約表現のどの部分に対応するかを、Kirillov の軌道法により分析した。

結果は、従来、非物理的であるとして、あまり顧みられなかった、一葉双曲面に付随したものが、非相対論的極限において、Galilei 群の表現の主要部分を形成するという意外なものであった。

以上を受けて、非物理的表現のテンソル積の分解公式の可能性についても探った。

残念ながら、これらの研究内容については、公開・公表の運びとはなっていないのであるが、その一部については、研究セミナー等で発表を行い、論文としてのまとめる際の準備を行った。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計2件)  
(1) Shigeru Yamagami,  
Geometry of coherent states of CCR algebras,  
Infin. Dimens. Anal. Quantum  
Probab. Relat. Top.,  
15(2012), 12500009(9pp), 査読有

(2) Taku Matsui and Shigeru Yamagami,  
Kakutani Dichotomy on Free States,  
Lett. Math. Phys.,  
102(2012), 285--295, 査読有

〔学会発表〕(計1件)  
Shigeru Yamagami,  
Kakutani dichotomy on free states,  
作用素論・作用素環論研究集会、  
2011年11月5日、琉球大学

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：  
発明者：権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yamagami/>

6. 研究組織  
(1) 研究代表者  
山上 滋 (YAMAGAMI, Shigeru)  
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・  
教授  
研究者番号：90175654

(2) 研究分担者  
( )

研究者番号：

(3) 連携研究者  
松井 卓 (Matsui, Taku)  
九州大学・大学院数理学研究科・教授  
研究者番号：50199733