様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　１日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2010～2012
課題番号：２２５４０２１９

研究課題名（和文）　平面閉曲線の曲げエネルギーに対する複数の制約条件の下での勾配流の解析

研究課題名（英文）　Analysis of gradient flow for the bending energy of plane curves under multiple constraints

研究代表者
長澤 壯之　（NAGASAWA TAKEYUKI）
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：70202223

研究成果の概要（和文）：平面閉曲線の曲げエネルギーに閉曲線の長さと閉曲線が囲む面積を指定した変分問題は、Helfrich 変分問題と呼ばれる。この変分問題は、次元の高い曲面や超曲面でも考えられる。対応する勾配流(Helfruch 流)の挙動を解析する。一般次元の Helfrich 流の存在を示し、一意性についても議論した。また、Helfrich 流の挙動の解析に有益であると考えられる一般化された回転超曲面の大域的存在についても新しい事実を証明した。

研究成果の概要（英文）：The Helfrich variational problem is one for the bending energy of closed plane curves under constrains of length and enclosed volume. The problem can be formulated not only for curves but also for surfaces and hypersurface, i.e., higher dimensional case. We study the behavior of the corresponding gradient flow, called the “Helfrich flow”. Firstly, we construct the Helfrich flow of general dimension, and discuss the uniqueness. Furthermore we get a new fact on the global existence of generalized rotational hypersurface which is useful for the analysis of behavior for the Helfrich flow.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１１年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１２年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：変分法・勾配流・制約条件・Lagrange の未定乗数・正則性

１．研究開始当初の背景

複数の制約条件を持つ変分問題に付随する勾配流を考察する。

制約条件を持つ変分問題は、通常、Lagrange の未定乗数法が用いられる。しかし、複数の条件が独立でなくなるとき、未定乗数が一意に定まらなくなり、解くべき方程式が定まらなくなる。これを条件の **退化** と呼ぶ。そこで、未定定数が表面に現れないように問題を再定式化する必要がある。

制約条件の非退化性と勾配流の正則性の関連性を重点的に解析する。

２．研究の目的

複数の制約条件が退化する否かは、勾配流自身によって決まるものであるので、初期の状態で条件が非退化であっても、時間発展に伴って、有限時間で退化点に到達する可能性

がある。多くの変分問題の場合、勾配流方程式は放物型偏微分方程式となるため、「**非退化点から出発した勾配流は有限時間で退化点に到達する事はない。**」と予想されるが、厳密には証明されていない。

本研究では、複数の制約条件を持つ変分問題に付随する勾配流一般ではなく、以下に述べる Helfrich 流に絞って、上の予想の解明に取り組む。

平面閉曲線の曲げエネルギー(Willmore 汎関数ともいう)は、曲線の曲率を 2 乗を曲線全体で積分したものである。このエネルギーに閉曲線の長さと閉曲線が囲む面積を指定した変分問題は、Helfrich 変分問題と呼ばれる。すなわち、与えられた長さと面積を持つ閉曲線の中で曲げエネルギーを最小にする(あるいはもっと緩く、停留させる)ものを求めよという幾何学的最適化問題である。

この変分問題は、平面領域の熱核の漸近展開の初めの３項を与えて、４項目を最小化する領域を決定せよいう問題と等価である。
また、次元の高い曲面や超曲面でも考えられるが、特に、2 次元曲面の場合は、赤血球膜の形態変換モデルでもある。

Helfrich 変分問題に対応する勾配流は、Helfrich 流と呼ばれ、制約条件の下で曲げエネルギーを最も効率よく減らす変形を与える。Helfrich 流の存在・一意性やその挙動を解析し、上述の予想の解明に取り組む。

３．研究の方法

本研究に取り組むより以前に、ペナルティー法を用いて、平面閉曲線に対する Helfrich 流を構成し、それについては「予想」が正しい事を示した(参考文献[5])。

ペナルティー法で得られる解は一意性が保障されないので、「予想」を完全に解明したことにはならない。そこで、Projected Gradient Flow の考えを用いて、勾配流の存在と一意性を保証する事を考える。

Projected Gradient flow とは勾配流を制約条件の第一変分が張る線形空間の補空間へ射影したものを指す。これにより、制約条件付きの勾配流を Lagrange の未定乗数を表に出すことなく問題を定式化する。すなわち、条件が退化する場合でも考察するべき方程式を確定させる事ができる。条件が退化するか否かは、射影作用素の性質に反映される。

４．研究成果

(1) Hill の方程式の固有値の漸金分布

Projected Gradient Flow に限らず、発展方程式の解の存在と一意性について基本となるのは、線形化作用素のスペクトル解析である。本研究で取り上げた平面閉曲線の場合のスペクトル解析は、古典的な Hill の方程式の解析に帰着される。初年度は、その固有値の漸近分布について解析し、従来知られている結果を改良することが出来、論文として公表した(論文④)。

(2) 一般次元 Helfrich 流の存在と一意性

制約条件付き勾配流において、初期時刻で制約条件が非退化である場合に、時間発展に伴い、有限時間内に条件の退化が起こり得るのかという問題に取り組んだ、その結果、Helfrich 流の場合は、有限時間内に条件の退化が起こる事と、有限時間内に曲率の爆発が起こり事が関連するのではないかという考えに至った。

次元が 1(平面閉曲線)の場合と 2 次元以上の場合では、曲げエネルギーの共形的な性質が異なるため、大域解の存在または有限時間爆発について差が現れるはずである。

曲線や曲面に対する Helfrich 流の存在は、本研究の方法とは異なる定式化により得ていた。これを一般次元に拡張するため従来と異なる定式化を行った。Projected Gradient Flow により問題を再定式化である。Project Gradient flow は制約条件のない勾配流を制約条件の第一変分が張る線形空間に補空間に射影するもので、本質的には Lagrange の未定乗数法と同値であるが、未定乗数を表に出さないように定式化が可能である。これにより、複数の制約条件が退化する場合であっても、解くべき方程式が確定するのである。

Projected Gradient Flow の考えで Helfrich 流を再定式化した。曲げエネルギーの第一変分の主要部は、４階の楕円型作用素であるので、制約条件のない勾配流は４階の放物型偏微分方程式になる。Projected Gradient Flow はそれに複数の制約条の第一変分が張る線形空間の補空間へ射影したものである。射影作用素は積分で定義されるため、得られる方程式は非局所項を含む４階の放物型偏微分方程式である。

本研究では、一般次元の Helfrich 流の局所解の存在を示した。初期状態で制約条件が退化していなければ、解の一意性も得られる。初期状態で制約条件が退化する場合は、一意性が保障される条件を解析した。これらの結果は、従来の参考文献[4], [5]の結果を含むもので、これまでの結果を含め整理された形になった(論文②, ③)。

初期状態で制約条件が退化する場合の一意性について、論文②で挙げた条件は、必ずしも分かりやすいものではなかった。その条件を、幾何学的な曲率などの条件を用いて見やすい形に整理し直す事が出来、論文①としてまとめた。

(3) 一般化された回転超曲面の大域的存在

超曲面の勾配流の大域解または爆発については、そのままでは解析が困難である事が予想される。Helfrich 流が 4 階の放物型方程式であるうえ、非局所項を含むという形の複

雑さに起因する。特に方程式が2階でない事が解析を困難にする。平均曲率流(面積汎関数に対する勾配流)などの 2 階の放物型法手式で記述されるもののなかには、比較定理により大域解や爆発解の存在が証明出来るものがある。制約条件のない曲げエネルギーの勾配流(Willmore 流)でさえ、この手法が使えない事から、Helfrich 流についてこの方法を適用可能性は望むべくもない。

そのため、初期超曲面が一般化された回転超曲面の場合について考える事とした。時間発展しても一般化された回転超曲面であると仮定して、方程式を導出したが、大域解の存在または爆発の有無については、最終年度までに結論には至らなかった。それには、一般化された超曲面に関する詳細な解析が必要とされるからである。以下に述べるように、一般化された回転超曲面は母線により定まるので、曲線の解析に帰着される。

一般化された回転超曲面とは、コンパクト Lie 群 G と Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ への余次元 2 の主軌道を持つ表現に対し、その主軌道の 1 径数族の事である。Euclid 空間として3次元のものを考え、Lie 群として回転群を考えたものが、古典的な回転面である。この意味で、「一般化」されたものとなり、このような名称で呼ばれる。

上のような Lie 群と Euclid 空間の可能な組み合わせは、既に分類されており、5 つのタイプ、14 種ある事が知られている(参考文献[3])。特に3次元のタイプ I 曲面が古典的な回転面である。いずれも、タイプと種を指定すれば、超曲面は母線により定まるため、超曲面の解析が曲線の解析に帰着される。

与えられた関数を平均曲率に持つ一般化された回転超曲面の大域的存在について考察した。問題の設定を詳細に述べる。母線のパラメータを s とすると、一般化された回転超曲面の平均曲率は s の関数となる。そこで、s の関数を与え、この関数を平均曲率に持つ回転超曲面が大域的に存在するかを考える。「大域的」というのは、与えた関数の定義域と得られる平均曲率の定義域が一致する事をいい、超曲面が空間的に大域的に存在するという意味ではない。

本研究では、この問題を完全に解決した。すなわち、連続関数、タイプ、種を与えるとその関数を平均曲率に持ち、与えられたタイプと種の一般化された回転超曲面の大域的存在を証明した。特に、ここで得た結果と従来知られるもの(参考文献[1, 2])との差は以下の通りである。

① すべてのタイプを網羅

従来のものは、タイプＩの場合のみに対して知られている結果であるが、これをすべての場合に拡張した。

② 与える関数の条件の緩和

3次元 Euclid 空間内のタイプＩの回転面の構成では、与える関数は連続であればよい事が知られていた(参考文献[1])。高次元の場合は、タイプＩであっても、与える関数の解析性を必要とした(参考文献[2])(タイプ II-V の場合は、既知の結果はない)。本研究によって、すべてのタイプに対し、与える関数は連続であれば十分である事が分かった。

証明は、母線が満たす微分方程式の大域可解性を示す事になるが、解法が従来と異なる。

与える関数が解析的である場合は、考察すべき方程式は、級数の方法で解を構成できる。本研究では、関数の性質は連続性を仮定するが、解析性は仮定しない。従って、この方法は使えない。方程式の主要部から決まる重み付き関数空間を設定し、この空間上で逐次近似法が機能する事を示し、解を構成した。

また、大域的存在を示す場合に生じる困難さも次のように克服した。方程式は、超曲面のタイプと種を決める Lie 群により定まる Weyl chamber とよばれる集合の境界上で退化する。従って、母線が Weyl chamber の境界に触れるときに、解の延長可能性が非自明になる。母線が Weyl chamber の境界に触れる場合がある事は、簡単な実例があるため、大域解の存在を示すためには、この問題を避けるわけにはいかない。そこで、母線が Weyl chamber の境界に突入するとして、突入角の詳細な解析を行った。その結果、突入角は任意の値を取る訳ではなく、タイプと種によって定まるある値のみが許容される事が明らかになった。これは、Weyl chamber の境界から方程式を解きなおす際に、その初期値が任意の値を取り得ない事を意味する。方程式が退化する場合でも、この事実を利用し適当な関数空間を設定する事によって、解が大域的に接続出来る事が保証できた。

証明には膨大な計算が必要なるため、タイプ I・II に対するものと、III-V のものの 2 篇の論文に纏めた(未出版)。手法としては、タイプ I-III と IV-V に差が生じる。非線形方程式を逐次近似法で解く際、方程式のどの部分までを主要項として解釈するかによって、逐次近似の収束・発散に差が生じるためである。タイプ IV-V で行った手順はタイプ III までには不要であるが、手順を加えても逐次近似は機能する。その意味で、すべてタイプでも有効であり、普遍的なものであるといえる。

論文としては、未出版であるが、学会や研究集会では、すでに公表済みである(学会発表①-③)

(3) 条件付き勾配流に関する著書執筆

Helfrich 流を含む Projected Gradient flow の一般論を著し、出版した(図書①)。

(4) 今後の展望

本研究期間内に、**「非退化点から出発した勾配流は有限時間で退化点に到達する事はない。」**という予想の証明、または、反例の構成には至らなかった。しかし、有限時間で退化点に到達する事と曲率の爆発の関連性が垣間見え、一般化された回転超曲面の大域的存在の証明という別の観点の研究に進展した。この結果は、すべてのタイプを網羅し、かつ仮定を緩和する事ができたという点で、微分幾何学に大きな貢献をしたと自負している。

この結果を引き継ぎ、当初の予想の解明に取り掛かりたい。

参考文献(5. 発表論文等以外のもの)

[1] J. Dorfmeister & K. Kenmostu, Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, Differential Geom. Appl., 27, 2009, 702-712

[2] K. Kenmotsu, Surfaces of revolution with prescribed mean curvature, Tôhoku Math. J. (2), 32, 1980, 147-153

[3] W.-Y. Hsiang & H. B. Laoson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, J. Differential Geom., 5, 1971, 1-38

[4] Y. Kohsaka & T. Nagasawa, On the existence of solutions of the Helfrich flow and its center manifold near spheres. Differential Integral Equations, 19, 2006, 121-142

[5] T. Kuruhara & T. Nagasawa, On the gradient flow for a shape optimization problem of plane curves as a singular limit. Saitama Math. J., 24, 2006/2007, 43-75.

５．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計４件)

① T. Nagasawa, Existence and uniqueness of the n-dimensional Helfrich flow, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, Springer INdAM Series, 査読有, 2, 2013, 237-250

② T. Nagasawa & T. Yi, Local existence and uniqueness for the n-dimensional Helfrich flow as a projected gradient flow, Hokkaido Math. J., 査読有, 41, 2012, 209-226

③ T. Nagasawa, Gradient flow for the Helfrich variational problem, 変分問題の展開－幾何学的勾配流と臨界点理論の新潮流, 京都大学数理解析研究所考究録, 査読無, 1740, 2011, 11-23

④ T. Nagasawa & T. Ohrui, Asymptotic distribution of eigenvalues of Hill's equation with integrable potential under periodic condition, Saitama Mathematical Journal, 査読有, 27, 2011, 1-6

〔学会発表〕(計７件)

① 長澤 壯之, 与えられた関数を平均曲率に持つ Euclid 空間内の一般化された回転超曲面の大域的存在について, 研究集会「界面と数理の幾何解析」, 2012 年 11 月 29-30 日, 芝浦工業大学

② 劔持 勝衛, 長澤 壯之, 与えられた関数を平均曲率に持つ Euclid 空間内の一般化された回転超曲面の大域的存在について, 日本数学会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学

③ 長澤 壯之, On the global existence of generalized rotational hypersurfaces with prescribed mean curvature in the Euclidean spaces, Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2011 年 12 月 20 日, 東北大学大学院理学研究科

④ T. Nagasawa, Existence and uniqueness of the n-dimensional Helfrich flow, INdAM Workshop (Second Italian-Japanese Workshop) "Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's", 2011 年 6 月 23 日, Palazzone in Cortona (イタリア)

⑤ 長澤 壯之, n-dimensional Henfrich flow, The Sixth "Topics in Nonliner Problems", 2010 年 9 月 18 日, 山口大学理学部

⑥ 長澤 壯之, The n-dimensional Henfrich flow, International Workshop on PDE "Concentration and Related Topics in Nonlinear Problems", 2010 年 11 月 22 日, 東北大学大学院理学研究科

⑦ 長澤 壯之, Gradient flow for the Helfrich variational problem, New Trends of Variational Problems, 2010 年 6 月 7 日, 京都大学数理解析研究所

〔図書〕(計１件)

① 長澤 壯之, 条件付き勾配流, 大学院レクチャーノートシリーズ TML 25, 東北大学大学院理学研究科, 2011, pp.69

〔その他〕

ホームページ等

http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/TakeyukiNagasawa.html

６．研究組織
(1)研究代表者
長澤 壯之 (NAGASAWA TAKEYUKI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：70202223

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
H.24 より東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90205295
太田 雅人
埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授
H.24 より東京理科大学・理学部・准教授
研究者番号：00291394
阪本 邦夫
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
(H.25.3 退職)
研究者番号：70089829
立川 篤
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：50188257