

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540221

研究課題名(和文) 微分力学系の生成的性質の研究

研究課題名(英文) The study of generic properties of differentiable dynamical systems

研究代表者

林 修平 (HAYASHI, Shuhei)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20247208

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：一様双曲性(Axiom A + no cycle condition)を持つC1級微分同相写像の集合の閉包の補集合にはホモクリニック分岐が稠密に存在するというC1 Palis 予想について、C2微分同相写像のリアプノフ指数が0を持つエルゴード測度をC1摂動によって消去できれば正しいことを証明した。2次元の場合には一様双曲性を持つC1級微分同相写像が稠密に存在するというSmale予想が正しくなければ(必要なら逆写像をとれば)その補集合には残留集合上に無限個の可観測沈点か無限個の病的な沈点が存在することを証明した。さらにある条件下でのC2微分同相写像に対する新しいC1級閉補題を開発した。

研究成果の概要(英文)：On the C1 Palis Conjecture saying that in the complement of the closure of C1 diffeomorphisms having the uniform hyperbolicity (Axiom A + no cycle condition) there exist a dense subset of those exhibiting homoclinic bifurcations, we prove that the conjecture is true if C2 ergodic measures with zero Lyapunov exponents are destroyed by C1 small perturbations. For the 2-dimensional case, if Smale Conjecture saying that uniformly hyperbolic diffeomorphisms are dense in C1 surface diffeomorphisms is not true, then (taking the inverse if necessary) in a residual subset of the complement of uniformly hyperbolic diffeomorphisms, there exist infinitely many sinks, which are either observable or pathological. Moreover, we developed a new C1 closing lemma for C2 diffeomorphisms under some condition.

研究分野：力学系

キーワード：Palis予想 Smale予想

## 1. 研究開始当初の背景

J. Palisは1980年代に閉多様体上の微分同相写像に対し、非遊走集合上で安定な力学系(一様双曲的な力学系)の閉包の補集合には2つのタイプの分岐現象が存在するということを予想した。その1つはホモクリニック接触から、もう1つは異次元ヘテロクリニック・サイクルから発生するホモクリニック分岐であるが、後者のタイプは3次元以上でのみ存在する現象である。そのPalis予想は2000年頃 PujalsとSambarinoによって閉曲面上の $C^1$ 級微分同相写像の場合に肯定的に解決された。つまり2次元の場合は一様双曲的なものとホモクリニック接触を持つものを合わせると $C^1$ 位相に関して全体で稠密になる。しかしながら3次元以上では未だに未解決である。さらにSmale予想と呼ばれる古典的な予想では閉曲面上の $C^1$ 微分同相写像の空間において一様双曲的なものは稠密であるとする。つまり $C^1$ 位相の場合に限るとPujalsとSambarinoはPalis予想を解決したもののSmale予想へはまだ多くの困難があると考えられる。

## 2. 研究の目的

Palis予想とSmale予想はともに微分同相写像の空間において著しい特徴を持つ稠密部分集合を決定する問題であるが、微分同相写像の空間における新しい生成的(generic)な性質を見出すことが解決へのステップである。実際、生成的性質は可算無限回共通部分をとっても稠密性が残るため、より多くの生成的性質を重ね合わせることで目的とする稠密部分集合に近づけることができる。本研究の目的は上記の予想を念頭に置きながら、新しい生成的性質を発見し、それを基礎としてこれらの予想の解決につなげることであった。これらの予想は有名なPalis-Smale構造安定性予想の延長線上にあるもので、現在においても力学系研究の中心問題の1つである。1960年代にSmaleが構造安定性の特徴付けを目指していた中で

2次元のフローの場合と同じように多様体上には稠密に安定な力学系が存在すると予想したSmaleであったが、高次元では次々に反例が発見され2次元の $C^1$ 級微分同相写像の場合だけがSmale予想として生き残っている。一方で、高次元についてSmaleの「夢」が崩壊した中で、安定な力学系の集合の補集合を理解するためにはどのような現象を手掛かりとするべきかを考え、Palisが設定したものがホモクリニック分岐であり、具体的にはホモクリニック接触と異次元ヘテロクリニック・サイクルから発生する分岐であるとしたものがPalis予想である。このような歴史的経緯から見ても本研究課題の重要性は明白である。

## 3. 研究の方法

本研究課題の申請時に、本研究代表者は微分同相写像に関する新しい摂動定理および生成的性質を得ていた。1つはManeのErgodic Closing Lemmaを拡張したものであり、もう1つはやはりManeによる $C^2$  Connecting Lemmaの応用として得られた一様双曲性を得るための $C^2$ 位相に関する生成的性質である。この2つの新しい結果を上記研究目的の $C^1$ 位相に関する稠密性につなげることが基本的な方向性であった。 $C^2$ 位相に関する残留集合は $C^1$ 位相に関して稠密であるという事実から、 $C^2$ 位相に関する生成的性質を持つ微分同相写像からスタートして、 $C^1$ 位相に関する摂動定理を適用することができる。つまり、これまで知られているものに加え上に述べた新しいものも合わせて、ある条件の下で $C^1$ 級摂動によりホモクリニック分岐をもたらす現象をつくり出すことを考えた。もしそれがつくり出せればホモクリニック分岐を示す微分同相写像で $C^1$ 位相において近似できることになるので、もとの微分同相写像の性質を仮定から排除することができ、最終的に一様双曲性まで持っていくことが出来るかもしれない。これは上に述べた新しい2つの結果を有効に利用する方法でもあった。

#### 4. 研究成果

- (1) 3で述べた方法により $C^1$ 位相に関するPalis予想の解決に向けて、新しい $C^2$ 位相に関する新しい生成的性質を得た。つまり閉多様体上の微分同相写像の空間において $C^2$ 位相に関するある残留集合が存在して、その集合に含まれる $C^2$ 級の微分同相写像に対してそれがホモクリニック接触を持つもの、または異次元ヘテロクリニック・サイクルを持つもので $C^1$ 近似できないという条件下で、もしその微分同相写像がすべてのエルゴード測度に対するリャプノフ指数が0でなければ、それは一様双曲的であることを証明した(発表論文[1]参照)。つまり高次元 $C^1$ Palis予想を解決するには、 $C^2$ 級の微分同相写像に対して、リャプノフ指数0を持つものからの $C^1$ 摂動により、ホモクリニック接触または異次元ヘテロクリニック・サイクルをつくれればよいことが判明した。これに関して、より具体的に説明する。一般的な戦略として以下のようなステップが考えられる。(I)ホモクリニック接触から $C^1$ 位相で離れた微分同相写像は優越分解を持つ(弱い形の双曲性)。(II)微分同相写像が異次元ヘテロクリニック・サイクルからも離れているとして、より多くの情報を得る。(III)リャプノフ指数0を除去するか、またはリャプノフ指数0が存在しないことを証明する。今回の結果はこの(III)に関わるものである。その新しさは $C^1$ Palis予想の障害として $C^2$ 級微分同相写像に対するリャプノフ指数0の存在を示したことにある。実際 $C^1$ 級微分同相写像に対するリャプノフ指数0の存在はすでによく知られている事実である。ところがこの種の研究において $C^1$ 級と $C^2$ 級の相違は巨大なもので、閉曲面上の微分同相写像を考えても大きな違

いが見られる。例えばSmale予想は $C^1$ 級微分同相写像に限定されたもので、 $C^2$ 級微分同相写像については反例が存在する。それはNewhouse領域と呼ばれる領域でホモクリニック接触が稠密に存在する開集合が一様双曲的な $C^2$ 級微分同相写像の補集合に存在する。その存在を導く性質が $C^2$ 級のもたらずある種の剛性(bounded distortion)であるが、リャプノフ指数0の除去にその剛性を使えることが、今回の結果の優位性である。さらにこの結果を2次元の場合に適用すると、閉曲面上の $C^2$ 級微分同相写像の空間におけるある $C^2$ 級残留集合において次のようなdichotomyが得られる。もしサドル型周期点の集合の閉包上に優越分解が存在するならば、その $C^2$ 級微分同相写像は一様双曲的であるか、もしそうでなければ、あるエルゴード測度に対するリャプノフ指数0を持つようなクプカ・スメール微分同相写像である。この結果は周期的沈点または周期的源点ではない極限点の閉包上での優越分解の存在を仮定すると2次元 $C^1$ Palis予想の証明で用いられたPujals-Sambarinoの結果から従う。この優越分解の存在領域とサドル型周期点の集合の閉包とを比較すると、明らかに後者に方が小さい(つまり条件が弱い)が、ある $C^1$ 級残留集合上で一致することは $C^1$  Closing Lemmaの直接の結果である一般稠密定理からわかる。しかしながら力学系理論全体において大きな未解決課題である $C^2$  Closing Lemmaが知られていないため、 $C^2$ 位相ではPujals-Sambarinoの結果の拡張となる新しい結果となっている。

- (2) (1)で述べた $C^1$ 摂動によるリャプノフ指数0の除去は2次元の場合には無限個の周期的沈点または周期的源点を $C^1$ 摂動によりつくり出すことと関係する。実際Maneは $C^1$  generic dichotomy

として、ある  $C^1$  位相に関する残留集合上で一様双曲的かそうでなければ無限個の周期的沈点または周期的源点が存在するという定理を証明している。つまりSmale予想を解決するには、この無限個の周期的沈点または周期的源点が存在する領域（これは(1)で述べたNewhouse領域内の残留集合である）が実は存在しないことを示せばよい。言い方を変えるとNewhouse領域が存在しないことを示せばよい。本研究代表者はPalis予想の研究の副産物としてManeの  $C^1$  generic dichotomy をさらに精密な形で提示できることを示した。より詳しく言うと、必要ならば逆写像を考慮することにより無限個の周期的沈点が存在すると仮定したとき、その周期的沈点は数値解析的な観点から可観測なものか、あるいはそうでなければ対照的に病的なものであることを示した。この結果を現在投稿中の論文にまとめた。

- (3) (1)で述べたように、リャプノフ指数0を持つ  $C^2$  級の微分同相写像からスタートして  $C^1$  級の摂動定理を適用する利点は  $C^2$  級ならばPesin理論等の構造定理が使えることにある。一方で一度でも  $C^1$  Closing Lemma等の  $C^1$  摂動定理を適用すると  $C^2$  級の微分可能性が失われるという不利な点がある。それでも本研究代表者が開発した「拡張されたErgodic Closing Lemma」を適用すると、全体としての  $C^2$  級微分可能性は失われるが、比較的小きな摂動領域において、与えられたエルゴード測度に関して大きな可測集合上で閉軌道をつくることができる。これを用いて部分的双曲性を持ち、さらにPesin理論で前提とされた非一様双曲性が部分的双曲分解の両端にある部分接束上で存在すれば、Pesin理論の局所安定・不安定多様体に対応する局所強安定・不安定多様体を持つ周期軌道が  $C^1$  摂動により得られること

がわかった。この仮定は(1)での  $C^2$  リャプノフ指数0の除去のステップにおいて自然に現れる状況であるため、今後の研究への活用が期待できる。それをまとめた論文が発表論文[2]である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計2件)

[1] Shuhei HAYASHI, “A  $C^2$  generic trichotomy for diffeomorphisms: hyperbolicity or zero Lyapunov exponents or the  $C^1$  creation of homoclinic bifurcations” Trans. Amer. Math. Soc. vol. 366 (2014) 5613–5651. 査読有, DOI:10.1090/S0002-9947-2014-06425-8

[2] Shuhei HAYASHI, “A  $C^1$  closing lemma for nonuniformly partially hyperbolic diffeomorphisms of class  $C^{1+\alpha}$ ” Dynamical Systems: An International Journal. 掲載予定, 査読有, DOI:10.1080/14689367.2015.1055320

〔学会発表〕 (計8件)

[1] A  $C^2$  generic trichotomy for diffeomorphisms, 力学系研究集会, 東京工業大学, 2011年1月.

[2] A  $C^2$  generic obstruction to hyperbolicity for diffeomorphisms with dominated splittings, “Beyond Uniform Hyperbolicity 2011” Marseilles, France, May 2011.

[3] On the  $C^1$ -creation of good periodic orbits, Todai Forum 2011 “Geometry and Dynamics” ENS-Lyon, France, October 2011.

[4] On the creation of observable periodic orbits for diffeomorphisms, RIMS 研究集会「力学系とトポロジーのフロンティア」, 京都大学 2011年11月.

[5] On the observability of periodic orbits for diffeomorphisms, 京都力学系セミナー, 京都大学 2012年1月.

[6] On the observability of periodic orbits for diffeomorphisms, Conference in Dynamical Systems, Trieste, Italy, June 2012.

[7] On infinitely many observable sinks for diffeomorphisms, RIMS研究集会「力学系と計算」 京都大学 2014年1月.

[8] A refinement of Mane's  $C^1$  generic dichotomy, ICM 2014 Satellite Conference on “Dynamical Systems and Related Topics” Daejeon, Korea, August 2014.

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

(1)研究代表者

林 修平 (HAYASHI, Shuhei)

東京大学・数理科学研究科・准教授

研究者番号：20247208