

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 5 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22540224

研究課題名（和文） 双直交関数系および離散・超離散可積分系の研究とその応用

研究課題名（英文） Research on systems of the biorthogonal functions, discrete and ultradiscrete integrable systems, and their applications

研究代表者 辻本 諭 (Tsujimoto Satoshi)

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：60287977

研究成果の概要（和文）：直交多項式の理論と廣田のタウ関数の理論を用いることで、古典直交関数系と非自励離散可積分系を手がかりに双直交関数系の解析をすすめた。この解析の中で、歪直交多項式に付随する離散可積分系の導出、楕円パンルベ方程式の楕円超幾何関数解の導出とパデ補間の関係を明らかにすることに成功した。また、古典双直交有理関数系に付随する非自励離散可積分系から、3重対角行列束に対する一般化固有値問題に対する減算のない安定なアルゴリズムを与えた。

研究成果の概要（英文）：By using the theory of orthogonal polynomials and the theory of Hirota's tau-functions, we study the system of bi-orthogonal functions with the help of the classical orthogonal functions and the nonautonomous discrete integrable systems. In this study, we have succeeded in deriving the discrete integrable systems associated with skew-orthogonal polynomials and making clear the relationship between the Padé interpolations and the solutions of the elliptic Painlevé equations in terms of elliptic hypergeometric functions. A stable numerical algorithm for the generalized eigenvalue problem of a tri-diagonal matrix pencil is introduced from the nonautonomous discrete integrable systems related to the classical biorthogonal rational functions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000円	360,000円	1,560,000円
2011年度	900,000円	270,000円	1,170,000円
2012年度	900,000円	270,000円	1,170,000円
年度			
年度			
総計	3,000,000円	900,000円	3,900,000円

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系

1. 研究開始当初の背景
理論と応用をつなぐ重要な役割を果たしている直交多項式をはじめとする特殊関数は、可積分系における基礎方程式の一つである戸田格子と密接な関係を有していることはよく知られている。さらに近年の研究の中で、

種々の双直交性を有する多項式や有理関数についても対応する可積分系が明らかになってきた。最近の特殊関数に関連する話題の中で、さまざまな双直交性を有する特殊関数が重要な場面現れている。その一方で、非自励系に対する可積分系の側面からの解析は

進んでおらず、その解析は急務であった。

2. 研究の目的

最近の双直交関数系に関する結果に可積分系の解析手法である廣田のタウ関数を組織的に導入することにより、双直交関数系と可積分系に関する相補的かつ統合的な理論研究を展開することを第1の目的とする。特に、双直交性を有する楕円特殊関数および R2 格子を手がかりに解析を深めていく。また、ここで得られた理論的結果を数学・物理学にとどまらず情報学・工学へと橋渡ししていくことを第2の目的とする。

3. 研究の方法

古典直交多項式の理論と可積分系の理論を用いることで、楕円超幾何関数と離散戸田格子とその拡張である R2 格子に着目し、楕円超幾何関数を行列要素とするタウ関数の多彩な性質について双直交関数系および離散可積分系の観点から解析を進めることにより、PPZ 型パデ近似・補間とパンルベ方程式の関係について明らかにしていく。また、双直交関数系のスペクトル変形の理論から、R2 格子のヒエラルキーや拡張を導く。さらに R1 格子および R2 格子の超離散化の手続きを施すことにより、3つ以上の非自励パラメータを有する箱玉系の全体像を明確にする。加えて、アルゴリズムの収束速度や安定性を制御するために最適な非自励パラメータ戦略を検討することにより、非自励離散可積分系による一般化固有値問題の数値計算アルゴリズムの設計を行う。

4. 研究成果

直交多項式の理論と廣田のタウ関数の理論を用いることで、古典直交関数系と非自励離散可積分系を手がかりに解析をすすめ、以下の項目について結果を得た。これらは、情報学への応用を見据えた古典直交多項式と可積分系に関する研究成果であり、国内外においても独自のものである。数値計算アルゴリズムおよび超離散系への展開する際の基礎的理論となるものであると考える。

(1) 【古典直交多項式と可積分系のスペクトル保存変形理論】

直交多項式における古典性については、漸化式と微分方程式の間の双対性や線形汎関数に対する議論など様々な等価な特徴付けがなされている。Gomez-Ullate, Kamran, Milson によって導入された例外型古典直交多項式について解析した。ここではスペクトル保存変形の理論を用いることで、例外型 Jacobi 多項式および例外型 Laguerre 多項式に対する新たな導出法とその漸化式構造を

明らかにした。特に、5 項間以上の漸化式など従来の古典直交多項式では表れない特徴付けを与えた。

(2) 【超離散系への応用】

直交多項式の理論を用いた超離散可積分系への応用として、有限格子上の非自励戸田格子方程式の超離散化を与えることに成功した。ここで対応する超離散系としては、長さ制限付きの箱玉系が表れることを明らかにし、従来の速度制限付きの箱玉系との関係を明らかにし、対応する厳密解を与えた。

(3) 【歪直交多項式の離散スペクトル変換に付随する離散可積分系】

バフィアンで表される歪直交多項式に対して、直交多項式において有用であったクリストッフェル変換を導出し、そのコンパクトな表現を与えた。さらに、逆変換も導入することで対応する離散可積分系を与えた。この離散系は、Pfaff 格子の離散類似を与えている。

(4) 【Bannai-Ito 多項式の解析】

これまであまり直交多項式として議論されることがなかった Bannai-Ito 多項式の古典直交多項式としての様々な性質を明らかにした。

(5) 【パデ補間とパンルベ方程式】

楕円超幾何関数 $12V11$ を要素として持つ行列式の比で表される有理関数に対応するパデ補間を明らかにすることで、楕円パンルベ方程式の特解を与えることに成功した。

(6) 【例外型古典直交多項式に関する研究】

例外型古典直交多項式と「超可積分系」との対応関係を明らかにし、例外型ヤコビ多項式をもとに新しい超可積分なハミルトニアンを構成した。

(7) 【一般化固有値問題に付随する可積分系とアルゴリズムに関する研究】

2つの3重対角行列によって定式化される一般化固有値問題に付随する離散可積分系として R2 型格子を超離散化可能な形に書き換えることで、超離散 R2 格子の導出と同時に減算のない高精度計算可能な一般化固有値問題アルゴリズムを提案した。R2 型格子の漸近挙動を与えることにより、アルゴリズムの収束も示すことに成功し、具体例によって提案アルゴリズムの速度および精度における優位性を明らかにした。また、超離散 R2 格子と従来から知られている速度制限箱玉系(運搬車付き箱玉系)との関係を明らかにするため のの足がかりを得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Kazuki Maeda and Satoshi Tsujimoto, Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice, JSIAM Letters, 査読有, vol. 2, 2010, 95-98, joi: JST.JSTAGE/jsiaml/2.95
- ② Ryu Sasaki, Satoshi Tsujimoto and Alexei Zhedanov, Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transformations, Journal of Physics A: Mathematical and General, 査読有, vol. 43, 2010, 315204 (20pages), doi:10.1088/1751-8113/43/31/315204
- ③ Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet, Alexei Zhedanov, Jordan algebras and orthogonal polynomials, Journal of Mathematical Physics, 査読有, vol.52, 2011, 103512 (8 pages), doi: 10.1063/1.3653482
- ④ Hiroshi Miki and Satoshi Tsujimoto, Cauchy biorthogonal polynomials and discrete integrable systems, Journal of Nonlinear Systems and Applications, 査読有, vol. 2, 2011, 195-199, http://jnsonline.watsci.org/fulltext_pdf/2011v2/v2n3-pdf/8.pdf
- ⑤ Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet, Alexei Zhedanov, From $sl_q(2)$ to a parabosonic Hopf algebra, SIGMA, 査読有, vol.7, 2011, 093 (13 pages), doi: 10.3842/SIGMA.2011.093
- ⑥ Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet and Alexei Zhedanov, Dunkl shift operators and Bannai-Ito polynomials, Advances in Mathematics, 査読有, vol. 229, 2012, 2123-2158, doi: 10.1016/j.aim.2011.12.020
- ⑦ Hiroshi Miki, Hiroaki Goda and Satoshi Tsujimoto, Discrete spectral transformations of skew orthogonal polynomials and associated discrete integrable systems, SIGMA, 査読有, vol. 8, 2012, 008 (14 pages), doi: 10.3842/SIGMA.2012.008
- ⑧ Tsuyoshi Kato and Satoshi Tsujimoto, A rough analytic relation on partial differential equations, Journal of Mathematics Research, 査読有, vol. 4, 2012, 125-139, doi:10.5539/jmr.v4n4p125

- ⑨ Hiroshi Miki, Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet, Alexei Zhedanov, An algebraic model for the multiple Meixner polynomials of the first kind, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, vol. 45, 2012, 325205 (11pages), doi:10.1088/1751-8113/45/32/325205
- ⑩ Hiroshi Miki, Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet, Alexei Zhedanov, Quantum state transfer in a two-dimensional regular spin lattice of triangular shape, Physcal Review A, 査読有, vol. 85, 2012, 062306 (4 pages), doi: 10.1103/PhysRevA.85.062306
- ⑪ Sarah Post, Satoshi Tsujimoto and Luc Vinet, Families of superintegrable Hamiltonians constructed from exceptional polynomials, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, vol. 45, 2012, 405202 (10pages), doi:10.1088/1751-8113/45/40/405202
- ⑫ Satoshi Tsujimoto, Luc Vinet and Alexei Zhedanov, Dual -1 Hahn polynomials: "Classical" polynomials beyond the Leonard duality, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, Vol.141, 2012, 959-970, doi: 10.1090/S0002-9939-2012-11469-8
- ⑬ Masatoshi Noumi, Satoshi Tsujimoto and Yasuhiko Yamada, Pade interpolation for elliptic Painleve equation, in "Symmetries, Integrable Systems and Representations" ed. by K. Iohara et al., Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有, vol. 40, 2013, 463-482, doi: 10.1007/978-1-4471-4863-0_18

[学会発表] (計 4 件)

- ① 三木 啓司, 辻本 諭, Cauchy 双直交多項式に付随する非線形方程式, 日本応用数理学会, 2010 年 9 月 8 日, 明治大学 (東京都)
- ② 前田 一貴, 辻本 諭, 箱玉系の箱容量拡張と有限戸田格子, 日本応用数理学会, 2010 年 9 月 8 日, 明治大学 (東京都)
- ③ 辻本 諭, 例外型 Jacobi 多項式の漸化式について, 日本数学会, 2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学 (愛知県)
- ④ 柴田洋平, 三木啓司, 辻本 諭, 例外型 Krawtchouk 多項式について, 日本応用数理学会, 2011 年 3 月 7 日, 電気通信大学 (東京都)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ

<http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/lab/tujimoto>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

辻本 諭 (Tsujiimoto Satoshi)

京都大学・大学院情報学研究科・准教授

研究者番号：60287977

(2) 研究分担者

中村 佳正 (Nakamura Yoshimasa)

京都大学・大学院情報学研究科・教授

研究者番号：50172458

(3) 連携研究者

加藤 毅 (Kato Tsuyoshi)

京都大学・大学院情報学研究科・教授

研究者番号：20273427