

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2014

課題番号：22540232

研究課題名(和文) 極小曲面論並びに関連する幾何学的変分問題における特異点と均衡条件

研究課題名(英文) Singularities and balancing conditions on the theory of minimal surfaces and related geometric variational problems

研究代表者

加藤 信 (KATO, Shin)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：10243354

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：3次元Euclid空間内のn-noidについて、種数が1の場合に、ほとんど例の知られていなかった、Gauss写像の極とendの完全代表系の総和が一致するクラスにおいて、存在条件の定式化を行うと共に、新しい例を具体的に構成した。また、種数が0の場合に、endの個数が4または4より大きくかつある種の対称性を持つと言う条件下で、indexとnullityを決定し、fluxとの関連性につき結果を得た。さらに、これまで3以上の奇数個の平面型のendのみを持つ例しか知られていなかった、射影平面上のn-noidについて、4以上の偶数個のcatenoid型のendのみを持つ例の1パラメーター族を構成した。

研究成果の概要(英文)：We formulated the condition for the existence of n-noids of genus 1 in the Euclidian 3-space whose complete system of representatives of poles of Gauss map and that of ends coincide with each other. Moreover, we constructed new examples of such n-noids. We also decided the indices and nullities of n-noids of genes 0 under the condition that n is 4, or n is greater than 4 and the n-noid is symmetric in a sense. Moreover, we got a result on the relation between flux and nullity of n-noids. We also constructed a 1-parameter family of n-noids defined on punctured projective planes under the condition that n is an even number greater than or equal to 4, and that all of the ends of the surface is catenoidal type. It should be remarked here that only known examples of n-noids defined on punctured projective planes have odd number of planer ends.

研究分野：微分幾何学

キーワード：多様体上の解析 極小曲面

1. 研究開始当初の背景

3次元 Euclid 空間内の埋め込まれた end のみを持つ有限全曲率完備極小曲面、いわゆる n -noid について、研究代表者は、かつて、梅原雅顕氏並びに山田光太郎氏との共同研究において、指定された flux data を実現する種数 0 の n -noid の存在条件を、代数方程式の形で定式化し、これを用いて、generic な flux data に対して、それを実現する種数 0 の n -noid が存在することを証明し(引用文献)、続く野村健二氏との共同研究において、 n -noid の合同変換に関する不変量である各 end の flux vector の weight を、各 end 対に分解した相対 weight なる新たな不変量を導入することにより、種数 0 の n -noid の様々な崩壊現象について分析を行った(引用文献)。

また、今出水泰志氏との共同研究では、3次元 Lorenz 空間内の極大曲面について、対応する定式化や存在定理を与えた(引用文献)。

さらに、室谷文祥氏との共同研究において、種数 0 における諸事実の一般種数への拡張の第一歩として、種数 1 における分析を開始し、まず、種数 1 の n -noid を、Gauss 写像の極と end の完全代表系の総和が一致するか否かにより二つのクラスに分類、既知の例のほとんど全てを含む不一致のクラスについて、楕円関数を用いた存在条件の定式化を行った(論文)。

本研究は、これらの研究を引き継ぐものとして、開始された。

2. 研究の目的

本研究においては、上記の研究に引き続き、以下のことを企図した。

(1) 種数 0 の n -noid の moduli の構造について、flux data 並びに相対 weight を用いたさらなる分析を行う。

(2) 種数 1 の n -noid の内、これまでほとんど例が知られていなかった Gauss 写像の極と end の完全代表系の総和が一致するクラスについて、存在条件の定式化を行うと共に、新たな例の構成を試みる。

(3) 一般種数の n -noid について、種数 0 並びに 1 で明らかになった諸事実を検証する。

(4) 3次元 Lorenz 空間の極大曲面について、独自の現象を抜き出し、分析を行う。

(5) 極小曲面と関連の深い幾何学的変分問題への応用や一般化も試みる。

3. 研究の方法

上記の各目的について、下記の点に着目して、研究を進めた。

(1) 種数 0 の n -noid について、既に分析した崩壊現象とは別の崩壊もしくは退化についても、相対 weight を用いた記述が期待される。また、特色のあるクラスに注目して、より詳しい情報を引き出すことも考える。

(2) 種数 1 の n -noid の内、完全代表系の総和が一致しないクラスにおいては、theta 関数に類似した関数を用いた定式化が有効であったが、一致するクラスにおいては、 P 関数並びに zeta 関数を用いた定式化が有効となる。

(3) 種数 0 及び 1 で実行した定式化を一般種数で行うことには困難を伴うが、一般に flux 写像は定義可能であるので、これを用いる。

(4) 極小曲面においては、埋め込まれた end であるためには、Weierstrass data の 1-form の極の位数が 2 でなければならないが、極大曲面においては、null な flux の場合に限り、位数 1 も可能であり、ここに独自の現象が観測される。

(5) n -noid の中でも特に flat-ended なものは、Willmore 曲面との関連から、以前より研究が行われている。flux との関わりに重点をおき、これらの先行結果を解釈し直すことから始める。

それぞれの課題において、各研究分担者、連携研究者が、必要に応じて、それぞれの専門に関連する問題点について、その検討に協力した。

4. 研究成果

上記の各目的について、下記の成果を得た。

(1) 種数 0 の場合については、大きく分けて、次の 3 つの結果を得た。

種数 0 の n -noid について、分岐条件を、相対 weight を用いて完全に記述した(発表、論文は現在投稿準備中)。

極小曲面の安定性を計る指標である index と nullity につき、generic な n -noid については、江尻典雄氏と小谷元子氏、納谷信氏、Montiel-Ros らによる先行結果により、既に精確な値が知られていたが、本研究においては、end の個数 n が 4 であるか、または n が 4 より大きくかつある種の対称性を持つ場合において、generic でない n -noid についても、Gauss 写像と

なる各有理関数に対して、index と nullity の値を決定した。

また具体的にどのような曲面がそれに対応するのかについても、非自明な例を新たに与えた。例えば、4-noid では、その共形類を決定する 4 次方程式が 4 重解を持つ場合や、また任意の偶数 n に対し、正 n 角反柱の対称性を持つ flux data を、同じ対称性で実現する n -noid の 1 パラメーター族において、flux data が停留する瞬間が、これに相当する。特別な場合では、正四面体の対称性を持つ 4-noid は、非自明な nullity を持つが、正八面体の対称性を持つ 6-noid は、非自明な nullity を持たない。

また、4-noid については、非自明な nullity を持つための必要十分条件を、relative weight を用いて完全に記述した(論文、発表)。

n が 4 より大きい一般の場合においても、非自明な nullity と relative weight の間に、何らかの関係性が見出されることが、今後期待される。

また、これまで 3 以上の奇数個の平面型の end のみを持つ Kusner の例しか知られていなかった、射影平面上の n -noid (その二重被覆が種数 0 となっている) について、平面型 1 個の他は全て catenoid 型の end を持つ例を、end の個数 n が 4 以上の偶数である場合について構成し、さらに、1 個の end の退化を許せば、この 2 例を結び、4 以上の偶数個の catenoid 型の end のみを持つ例の 1 パラメーター族を構成した。Kusner の例と今回得られた新しい例を併せると、Chern-Osserman の不等式において等号が成立するような、向き付け不可能な極小曲面が、end の個数 n が 3 以上の場合、いつでも存在することが明らかになったことになる。これらの例はいずれも、奇数位数 $n-1$ の巡回群の作用で不変となっているが、同じ対称性と end の個数を仮定した場合、奇数位数では面対称なものを同一視すれば、これらの族に限ること、また偶数位数の例は存在しないことも同時に示した(発表、論文は現在投稿準備中)。

奇数個の catenoid 型の end のみを持つ例の存在、並びに、偶数個の平面型の end のみを持つ例の存在については、依然未解決であるが、今回の結果は、仮にそれらの例が存在するとすれば、対称性が低いもしくは無いことを示唆しており、極小曲面の存在に関する新たな障害として、興味深いと思われる。

(2) 種数 1 の n -noid の内、これまでほとんど例が知られていなかった Gauss 写像の極と end の完全代表系の総和が一致するクラスについて、存在条件の定式化を行うと共に、新たな例を構成した(論文、発表)。

このクラスにおいては、不変量としての relative weight の導入には今の処成功していな

いが、或はその不可能性が証明されれば、二つのクラスの本質的な違いが、不変量の存在非存在によって特徴づけられることになり、興味深いと思われる。

(3) (1) において、非自明な nullity を持つと言う現象が、flux 写像の臨界点において常に観測されると言う事実が、種数に関わりなく成立することを示した(論文、発表)。

ここで扱った flux は、あくまで end の flux であるが、これに 1 次 homology 群の生成元となる loop に関する flux も併せて考えることにより、nullity のより正確な評価が、今後期待される。

(4) Weierstrass data の 1-form の極の位数が全て 1 である極大曲面について、指定された flux data を実現する曲面の存在条件を、代数方程式の形で定式化した。

この研究は、現在も引き続き進行中である。

(5) n -noid の中でも Willmore 曲面との関連の深い flat-ended な曲面の存在・非存在条件について、flux を用いた説明を与えた(発表、引用文献)。

<引用文献>

加藤 信: Willmore 曲面に関連する flat-ended な極小曲面について、Willmore 曲面について 第 2 巻, 山口大学数理科学レクチャーノート No.3, 1-12, 山口大学理学部数理科学科, 2014.

Taishi IMAIZUMI and Shin KATO: Flux of simple ends of maximal surfaces in $R^{\{2,1\}}$, Hokkaido Math. J. 37 (2008), 561-610.

Shin KATO: On the weights of end-pairs in n -end catenoids of genus zero II, Kyushu J. Math. 61 (2007), 275-319.

Shin KATO and Kenji NOMURA: On the weights of end-pairs in n -end catenoids of genus zero, Osaka J. Math. 41 (2004), 507-532.

Shin KATO, Masaaki UMEHARA and Kotaro YAMADA: General existence of minimal surfaces of genus zero with catenoidal ends and prescribed flux, Comm. Anal. Geom. 8 (2000), 83-114.

Shin KATO, Masaaki UMEHARA and Kotaro YAMADA: An inverse problem of the flux for minimal surfaces, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 529-559.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

Shin KATO and Kosuke TATEMICHII: Index, nullity and flux of n -noids, Osaka J. Math. に掲載決定済. 査読有

Shin KATO and Hisayoshi MUROYA: Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends II, Osaka J. Math. 52 (2015), 307-371. 査読有

Shin KATO and Hisayoshi MUROYA: Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends, Osaka J. Math. 49 (2012), 931-992. 査読有

[学会発表](計 10件)

加藤 信: n -noid の index, nullity と flux, 2015 名城大学幾何学研究集会「幾何構造の融合と発展」, 2015 年 3 月 9 日, 名城大学理工学部(愛知県名古屋市).

加藤 信: 向き付け不可能な n -end catenoid は存在するか?, 淡路島幾何学研究集会 2015, 2015 年 1 月 23 日, 国民宿舎慶野松原荘(兵庫県南あわじ市).

加藤 信: Index, nullity and flux of n -noids, 幾何学阿蘇研究集会, 2014 年 9 月 20 日, 休暇村南阿蘇(熊本県高森町).

加藤 信: Willmore 曲面の gap theorem について, 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」-Willmore 曲面について-, 2014 年 2 月 13 日, 山口県健康づくりセンター(山口県山口市).

加藤 信: Willmore 曲面に関連する flat-ended な極小曲面について, 研究会「多様体上の変分問題とその周辺領域」-Willmore 曲面について-, 2014 年 2 月 12 日, 山口県健康づくりセンター(山口県山口市).

加藤 信: 向き付け不可能な n -noid は存在するか?, 淡路島幾何学研究集会 2014, 2014 年 1 月 24 日, 国民宿舎慶野松原荘(兵庫県南あわじ市).

加藤 信: 平坦な端のみを持つ n -noid の空間の“連結性”とその効用, 若狭三方幾何学研究集会 2013, 2013 年 3 月 19 日, 若狭町観光ホテル水月花(福井県若狭町).

加藤 信: 分岐 n -noid に relative weight は定義できるか?, 淡路島幾何学研究集会 2012, 2012 年 1 月 29 日, 国民宿舎慶野松原

荘(兵庫県南あわじ市).

加藤 信, 室谷文祥: カテナイド型エンドをもつ種数 1 の極小曲面, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 2011 年 9 月 28 日, 信州大学(長野県松本市).

加藤 信: n -noid の分岐条件, 淡路島幾何学研究集会 2011, 2011 年 2 月 13 日, 国民宿舎慶野松原荘(兵庫県南あわじ市).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加藤 信 (KATO, Shin)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 10243354

(2) 研究分担者

高橋 太 (TAKAHASHI, Futoshi)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10374901

小森 洋平 (KOMORI, Yohei)
早稲田大学・教育学部・教授
研究者番号: 70264794
(平成 24 年度より連携研究者)

(3) 連携研究者

加須栄 篤 (KASUE, Atsushi)
金沢大学・理工学研究域数物科学系・教授
研究者番号: 40152657