科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６８６
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０２３４
研究課題名（和文）部分因子環の幾何学的表現とその応用に関する研究

研究課題名（英文）On the research of a geometric realization of subfactors and its applications

研究代表者
佐藤　信哉（SATO, Nobuya）

立教大学・理学部・准教授

研究者番号：６０３０５６６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,400,000円、（間接経費）　720,000円

研究成果の概要（和文）：研究期間の間，私は次の3つの結果を得た.
(1) II_1型部分因子環を用いたII_1型因子環に含まれるユニタリ群の幾何学的表現を構成した. (2) 部分因子環に付随するQ-systemに対して，deviationの方法によるコホモロジー群を3次まで定義した. (3) Argerami-Stojanoffによって導入された部分因子環のJones tower に対するWeyl群の増大列の新しい例を構成し，多くの場合，このWeyl群は自明になることを示した.

研究成果の概要（英文）：During the period of research, I obtained the following three results.
(1) I constructed a geometric representation of the unitary group of a type II_1 factor with a subfactor.(2) For a Q-system associated with a subfactor, I defined the cohomology groups up to degree three via the method of deviation.(3) I constructed a new example of the increasing sequence of Weyl groups defined by Argerami-Stojanoff and showed that in the most of cases the Weyl groups are trivial.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：部分因子環　paragroup　Q-system　コホモロジー群　幾何学的表現　Weyl群

１．研究開始当初の背景

(1) von Neumann 環の Hochschild コホモロジーの研究は古く，多くの場合について調べられてきたが，主な結果は１次以上のコホモロジー群は消滅するというタイプのものである．これは derivation に関する問題に対しての著しい解答を与える一方で，von Neumann 環の個性を調べるのには Hochschild コホモロジーは適していないともいえる．また，相対 Hochschild コホモロジー群に対しても上と同様のいくつかの結果が得られているが，特に部分因子環自体を調べるのに向いているとは言えない．
そこで，Hochschild コホモロジー群とは異なる方法で，部分因子環の個性を測る方法としての「コホモロジー」を導入しようと私は考えた．Jones 指数有限で深さ有限な部分因子環には paragroup と呼ばれる不変量がある．これは体の拡大に対して Galois 群が対応したように，部分因子環に対しての「量子化された Galois 群」と思うことができる．Paragroup はとても豊富な表現論を持っており，表現論的な観点からコホモロジー理論を構築できることが望ましい．一方，泉正己（京都大）と幸崎秀樹（九州大）は paragroup というよりはむしろ部分因子環の別の表現方法である Q-system に対して，自然な形で 2 次のコホモロジーを導入した．これは群のコホモロジーと似ており，実際，部分因子環が群作用から得られる場合には作用群の２次コホモロジー群と一致する．一般には群ではないが，Jones 指数が有限の時には，有限集合であることが知られている．
(2) 部分因子環の理論は，Wess-Zumino-Witten 模型などの共形場理論とも関わり合いがあり，ある種の共形場理論における fusion 代数は捻れ K 群という幾何学的な手法を用いて実現されることが知られている．したがって，部分因子環を何らかの方法で幾何学的に構成し，その K 群あるいはコホモロジー群から部分因子環の情報を得るということも考えられるのではないかと推測する．
(3) Argerami と Stojanoff は von Neumann 環の包含とそれに付随した条件付き期待値に対して，条件付き期待値の正規化群から定まる群（彼らは Weyl 群と呼んでいる）を構成した．Weyl 群は von Neumann 環の包含に対する不変量であり，幾何学的には条件付き期待値の軌道の情報を群で表すものといえる．また，彼らの論文では具体的な von Neumann 環の包含に対して，いくつかの例が挙げられている．

２．研究の目的

本研究の目的は以下の三点である．

(1) 部分因子環を新しい方法で類別するための道具として，部分因子環に対するコホモロジー理論を構築し，具体的な例の計算を行い，またその性質を明らかにすること．
(2) 部分因子環を幾何学的に表現し，それにより得られる幾何学的な不変量について，具体的な例をもとにして，その基本性質を探ること．
(3) Argerami と Stojanoff の導入した Weyl 群について，さらなる具体例を与え，II_1 型部分因子環の場合に Weyl 群がどれくらい強い不変量であるのかを調べること．

３．研究の方法

(1) 研究目的の(1)に関しては，部分因子環に対する相対 Hochschild コホモロジー群ではうまくいかないことがわかっているため，まったく新しい手法を用意しなければならない．そこで注目したのが，「量子化された Galois 群」としての部分因子環である．これまで相対 Hochschild コホモロジー群を計算するのに取り扱って来た方法と異なり，部分因子環から得られるテンソル圏を対象とした代数的に得られるコホモロジー理論を構築することである．そのためには，部分因子環の Q-system を圏論的観点から見直した Frobenius 代数の概念を用いる．
(2) 先行結果として，Beltita-Ratiu(2007)，Beltita-Gale(2008)があり，C*-環の包含 B ⊂ A とそれに付随した条件付き期待値がある場合に，C*-環 A のユニタリ群（あるいは可逆元からなる群）を幾何学的に表現するために，再生核の理論を用いるという手法が開発されている．これは表現論における Borel-Weil の定理の一般化に相当する結果である．この手法を部分因子環の理論に当てはまる形に拡張する方法を用いる．
(3) 重要な部分因子環のクラスとして，Jones 指数有限な深さ 2 を持つものがある．このような部分因子環は，Jones 指数有限かつ深さ有限な部分因子環から基本構成法と呼ばれる方法を繰り返すことにより得られることが知られている．例えば，有限群の接合積による部分因子環や Hopf 代数の接合積による部分因子環は深さ 2 の部分因子環の代表例である．これらの例について，Argerami-Stojanoff の意味での Weyl 群を調べることにより，その不変量としての強さを調べる．

４．研究成果

(1) J. Scott Carter ら(2008)は Markl と Stasheff による変形理論に基づいた双代数のコホモロジー理論を Frobenius 代数に対して拡張した．その際に用いた手法は，Frobenius 代数の演算を図式で表すというものであった．このとき，コホモロジーを定義するための微分(differential)もまた図式を用いて表される点に注目した．
　一方，Jones 指数有限な部分因子環の不変量として，Longo による Q-system がある．Q-system は Muger によって圏論的に捉えられ，今では III 型因子環 M の自己準同型写像 End(M)における Frobenius 代数（Frobenius 対象ともいう）として理解されている． 実

際，代数としての Frobenius 代数は，積，余積とこれらの間の関係式で定まるものであるが，圏論的な Frobenius 代数もまったく同じ関係式をみたす．しかも，Frobenius 代数の演算は図式を用いて表すことができることから，先に述べた J. Scott Carter らによる結果を圏論的な Frobenius 代数に拡張することができる．その結果，具体的に有限群作用による接合積から得られる部分因子環の Q-system（Frobenius 代数）に対して，泉 - 幸崎の意味での 2 次コホモロジー群と，圏論的対象としての Frobenius 代数の 2 次コホモロジー群を比較してみたところ，両者は異なるという結果を得た．この結果の意味するところについては現時点では解っておらず，今後，圏論的 Frobenius 代数のコホモロジー群についてさらなる例の計算をすることにより，部分因子環の分類について知見を深めたい．

(2)　N, M を II_1 型因子環とし，N は M の Jones 指数有限の部分因子環とする．$E: M \to N$ をトレイス τ を保つ条件付き期待値とする．N, M のトレイス τ による GNS 表現をそれぞれ $(\phi_N, L^2(N))$，$(\phi_M, L^2(M))$ と表す．

U(N)，U(M)を N, M それぞれのユニタリ群とする．このとき，自然な射影 $\pi_N: U(M) \to U(M)/U(N)$ と ϕ_N（$=\phi$ と置く）を U(N)に制限した写像から，U(M)-斉次ベクトルバンドル

$\Pi_{\phi,N}: U(M) \times_{U(N)} L^2(N) \to U(M)/U(N)$ を構成することができる．P_1, P_2 を直積集合 $U(M)/U(N) \times U(M)/U(N)$ に対するそれぞれ第 1 成分，第 2 成分への射影とする．また，$P_i^*\Pi_{\phi,N}(i=1,2)$ をベクトルバンドル $\Pi_{\phi,N}$ の射影 P_i による引き戻しとする．このとき，$U(M)/U(N) \times U(M)/U(N)$ から $\mathrm{Hom}(P_2^*\Pi_{\phi,N}, P_1^*\Pi_{\phi,N})$ への連続な切断 $K_{\phi,N}$ を次の式で与えることができる．

$$K_{\phi,N}(u_1U(N),\ u_2U(N))[(u_2, f)] = [(u_1, e(\phi_M(u_1^{-1}u_2)f))]$$

ここで，e は条件付き期待値 $E: M \to N$ を拡張して得られる直交射影 $e: L^2(M) \to L^2(N)$ である．この $K_{\phi,N}$ は再生核の性質を持つことが Beltita-Ratiu(2007)の結果から従う．したがって，再生核を用いて，特に，U(M)の表現空間 $L^2(M)$ から U(M)/U(N)から $U(M) \times_{U(N)} L^2(N)$ への連続切断への写像 $\iota_{\phi,N}$ を構成することができる．一方で，U(M)/U(N)から $U(M) \times_{U(N)} L^2(N)$ への連続切断のなす集合 $C(U(M)/U(N), U(M) \times_{U(N)} L^2(N))$ には U(M)が自然に作用しているが，再生核によるヒルベルト空間の構成により，U(M)の表現空間を得る．また，写像 $\iota_{\phi,N}$ は U(M)の作用と可換であることがわかる．したがって，写像 $\iota_{\phi,N}$ は U(M)の GNS 表現と，$C(U(M)/U(N), U(M) \times_{U(N)} L^2(N))$ 内の再生核ヒルベルト空間という幾何学的な表現を転絡していることがわかった．

今回の結果は，Jones 指数有限な部分因子環 $N \subset M$ が与えられたときに，大きい環 M のユニタリ群 U(M)をあるベクトルバンドルの切断の中に再生核ヒルベルト空間を構成し，ユニタリ表現を構成したのであるが，本当に構成したかったのはユニタリ群 U(M)の表現ではなく，部分因子環 $N \subset M$ そのものである．今回は技術的に困難な部分があり，部分因子環の表現を構成できなかったが，さらなる改良を加えて，部分因子環自体の表現を構成できることを目標としたい．

(3) N, M を II_1 型因子環とし，N は M の部分因子環とする．$E: M \to N$ をトレイスを保つ条件付き期待値とする．U(M)を M のユニタリ群とする．$N_E = \{u \in U(M) \mid E(uxu^*) = uE(x)u^*, x \in M\}$ を E の正規化群と呼ぶことにする．E の正規化群を N のユニタリ群 U(N)で割って得られる剰余群 $N_E/U(N)$ を条件付き期待値 E の Weyl 群といい，W(E)と表すことにする．重要な例（Argerami と Stojanoff による結果）としては次が挙げられる．II_1 型因子環 N と N と複素数に成分を持つ n x n 行列のなす代数 $M_n(C)$ のテンソル積からなる II_1 型因子環 M の包含において，トレイスを保つ条件付き期待値 E に対する Weyl 群 W(E) は自明群となる．

部分因子環 $N \subset M$ の基本構成法により得られる Jones 塔を

$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$

とし，M_n から M_{n-1} へのトレイスを保つ条件付き期待値を E_n と表す．ここで，$M=M_0$，$N=M_{-1}$，$E=E_0$ と置くものとする．このとき，条件付き期待値 E_n から E_0 を順番に合成して得られる写像 F_n は M_n から M_{-1} への条件付き期待値となる．さらに，Weyl 群 $W(F_n)$ については群としての包含関係 $W(E)=W(F_0) \subset W(F_1) \subset W(F_2) \subset \cdots \subset W(F_n) \subset \cdots$ という増大列を得ることが知られている（Argerami と Stojanoff による結果）．

さて，ここで，H を有限次元 Hopf C*-代数とし，その II_1 型因子環 N への作用による接合積 II_1 型因子環 を $N \times_\alpha H$ で表すと，部分因子環 $N \subset N \times_\alpha H$（=M と置く）を得る．ただし，$N \times_\alpha H$ から N への条件付き期待値を E とする．この部分因子環に対する Jones 基本構成法の結果得られるのは，因子環 N と複素数に成分を持つ n x n 行列のなす代数 $M_n(C)$ とのテンソル積である（これを M_1 と置く）．ただし，n は Hopf 代数の次元とする．M_1 から M への条件付き期待値を E_1 とする．ここで，条件付き期待値 E と E_1 を順に合成したものを F_1 と表すと，Weyl 群の包含 $W(E) \subset W(F_1)$ を得る．すると，先ほどの例により，$W(F_1)$ は自明な群であったので，W(E)もまた自明な群となることがわかった．部分因子環 $N \subset N \times_\alpha H$ は深さ 2 と呼ばれるクラスの既約な部分因子環であり，その場合，Weyl 群は自明であることが示された．これと同様の論法は，有限次元 Hopf C*-代数を有限次元弱 Hopf C*-代数に変更しても成り立つことがわかる．この場合は既約ではないが，深さ 2 の部分因子環である．したがって，以上を合わせると，深さ 2 の部分因子環のトレイスを保つ条件付き期待値に対する Weyl 群は自明であることがわかった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

① Nobuya SATO , An invitation to V.F.R.Jones’ planar algebras, 数理解析研究所講究録, 第 1716 巻, 2010, 64－83, 査読無

〔学会発表〕（計　1　件）

① 佐藤　信哉, An introduction to the planar algebras, 研究集会 Intelligence of Low-dimensional Topology, 京都大学数理解析研究所,2010 年 6 月 3 日

６．研究組織

(1)研究代表者

佐藤　信哉（SATO, Nobuya）
立教大学・理学部・准教授
研究者番号：６０３０５６６２