

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 29 日現在

機関番号：34103

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22540237

研究課題名(和文) パンルヴェ方程式およびガルニエ系の特殊解とモノドロミ

研究課題名(英文) Special solutions and linear monodromy for Painleve equation and Garnier system

研究代表者

金子 和雄 (Kaneko, Kazuo)

四日市大学・付置研究所・研究員

研究者番号：50571486

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円、(間接経費) 600,000円

研究成果の概要(和文)：(a)2次元退化ガルニエ系および(b)4次元パンルヴェ型方程式における超越的特殊解の研究(a)G(9/2),G(5)及びG(14),G(23)に対し、対称解の存在を示し、線型モノドロミを計算した結果につき学会報告した(2010慶応大、名古屋大、2011-3早稲田大)。

(b)藤、鈴木系の特異点における有理型解の分類及び線型モノドロミの計算、笹野系の特異点における有理型解の分類による藤、鈴木系との違い、藤、鈴木系および行列型パンルヴェの退化系 $NY\{A4\}$, $IV\{Mat\}$ および $II\{Mat\}$ につき学会報告した(2011-9信州大,2012-3東京理科大,2012-9九州大,2013-9愛媛大)。

研究成果の概要(英文)：We talked the research results on the transcendental special solutions to the two dimensional degenerate Garnier system and four dimensional Painleve type equations at Math.Society of Japan (Mar.2010, Sept.2010, Mar.2011, Sept.2011, Mar.2012, Sept.2012, Sep. 2013.)

(b) Papers published/submitted. (1) K. Kaneko, Local expansion of Painleve VI transcendents around a fixed singularity, J.Math.Phys. 50 (2009) 013531-1-24. (2) K.Kaneko, Symmetric solutions for the two dimensional I degenerate Garnier system G(5), Proc.Japan Acad.Ser.A,Math.Sci., 87 (2011), 114-118. (3) K.Kaneko and Y. Ohyama, Meromorphic Painleve transcendents at a fixed singularity, Math. Nachr. 286 (2013), 861-875. (4) Symmetric solutions to the four dimensional

degenerate Painleve type equation $NYA4$, J.Nonl.Math.Phys. 21.No. 3 (Sept.2014), 357-370. (5) K.Kaneko, Special solutions and linear monodromy for the two dimensional degenerate Garnier system G(1112), submitted to SIGMA.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，解析学基礎

キーワード：2次元ガルニエ系 パンルヴェ型方程式 有理型解の分類 退化系 モノドロミ 対称解 ベックルント変換

1. 研究開始当初の背景

(1) パンルヴェ方程式に対しモノドロミ可解な解を最初に見つけたのが R. フックスである。彼は第 6 パンルヴェ方程式に含まれるパラメータが $\mu = \nu = 2, -1 = 0$ の時の解 (ピカールの解とよばれている) に対し線型モノドロミを具体的に計算した(1911 年)。

(2) これに対しパンルヴェ方程式に含まれるパラメータが一般の値を持つモノドロミ可解な解を最初に見つけたのが A.V. キタエフである。彼は第 2 パンルヴェ方程式に含まれるパラメータが一般の値を持つ対称解と呼ばれる解を構成し、線型モノドロミを具体的に計算した(1991 年)。

2. 研究の目的

(1) パンルヴェ方程式は今から 100 年位前に発見された動く分岐点を持たない 6 個の 2 階非線型常微分方程式であり、その一般的な解は超越函数となるが、含まれるパラメータが特別な値をとるとき、梅村の古典解と称される特殊解の存在が知られている。申請者はこの古典解を拡張した「モノドロミ可解な解」について調べるのが目的である。これは含まれるパラメータを特別な値に固定せず、一般の値をとる場合で且つ、対応する線型方程式のモノドロミ(線型モノドロミ)が具体的に計算可能な解を言う。

(2) 申請者たちは現在まで第 4, 第 5, 第 6、次いで第 3 パンルヴェ方程式に対しモノドロミ可解な解を研究してきたが、この手法を 2 次元ガルニエ系および高階パンルヴェ方程式に適用することによりパンルヴェ方程式の解空間の構造の解明を目指す。

3. 研究の方法

(1) 年 2 回の学会、および毎夏の函数方程式論サマーセミナー他に参加/発表し、他の研究者たちとの議論により研究を促進させる。連携研究者である大山陽介とは定期的(原則: 週 1 回)打ち合わせ、不定期に開催される古典解析セミナーに出席し、議論を通じ研究を促進させる。

(2) 2 次元退化ガルニエ系はリーマン球面上の 5 点に確定特異点をもつ 2 階フックス型常微分方程式のモノドロミ保存変形から導かれる。変形方程式は動く代数的分岐点を持ち、有理式ハミルトン系として表わされるが、適当な正準変換によりパンルヴェ性を持つ多項式ハミルトン系を得る。特殊解は多項式ハミルトン系において求め、これを有理式ハミルトン系における解に復元した後線型モノ

ドロミを計算するという手順をとる。

4. 研究成果

(1) 2 次元退化ガルニエ系およびその退化系における超越的な特殊解の研究:

(1-1) 第 6 パンルヴェ方程式の拡張である 2 次元ガルニエ系 $G(11111)$ における特殊解と線型モノドロミについて超幾何方程式研究会 2009(2009-1-6, 神戸大)にて講演した。

(1-2) Special solutions and linear monodromy for the two dimensional degenerate Garnier system(11111) につき 2009 函数方程式論サマーセミナーにて講演(2009-7-31, 鳥羽)した。

(1-3) 第 5 パンルヴェ方程式の拡張である 2 次元退化ガルニエ系 $G(1112)$ の特殊解と線型モノドロミにつき講演(2009-9-25, 日本数学会、阪大; 2009-12-9, 第 1 回解析系研究集会、京大理; 2010-1-7, 超幾何方程式研究会、神戸大)した。

(1-4) 第 1 パンルヴェ方程式の拡張である退化ガルニエ系 $G(9/2)$ には 1 の 7 乗根を重みとする対称変換が存在し、対称解として原点の近傍に正則解とローラン級数解が 1 個ずつ存在すること、正則解に対応する線型方程式はベッセルの方程式に帰着され、線型モノドロミを計算した結果と合わせ学会報告した(2010-3, 慶応大)。

(1-5) 2 次元退化ガルニエ系における対称解につき函数方程式論ワークショップにて報告した(2010-7-26, 東大数理)。

(1-6) 第 2 および第 3 パンルヴェ方程式の拡張である退化ガルニエ系 $G(5)$ および $G(14)$ に対し、それぞれ 1 の 4 乗根、3 乗根を重みとする対称変換、および対称解を見つけ、線型モノドロミを計算した結果につき学会報告した(2010-9, 名古屋大)。特に $G(5)$ についてはハミルトン系から独立変数 s_2 について 4 階非線型偏微分方程式を導き、これを満たす有理型解が鈴木正樹氏の初期値空間を用いて求めた解に個数を含めて一致することを確認し、日本学士院紀要に投稿し掲載された(2011)。

(1-7) 第 3 パンルヴェ型方程式の拡張である退化ガルニエ系 $G(23)$ に対し、原点近傍に正則な対称解の存在を示した。この解に対する線型モノドロミを計算し、この解は無遠くにおけるストークス係数を 0 にする特徴をもつことを報告した(2011-1-6, 神戸大、2011-3, 日本数学会(早稲田大))。

(1-8) 2 次元退化ガルニエ系およびその退化系における超越的な特殊解の研究につき、これまでの研究のまとめをアクセサリパラメータ研究会(2012-3-17, 熊本大)にて報告し

た。

(2)4 次元パンルヴェ型方程式およびその退化系における超越的な特殊解の研究：

(2-1) 第 6 パンルヴェ型方程式の拡張の 1 つである藤、鈴木系の原点における正則解と線型モノドロミを計算し 2011 年 9 月(信州大)と、極を持つ特殊解につき 2012 年 3 月に(東京理科大)学会報告した。また超幾何方程式研究会 2012(2012-1-7, 神戸大)にて報告した。

(2-2) 第 6 パンルヴェ型方程式の拡張である藤、鈴木系と笹野系については双有理変換で移り合わないことが知られているが、ハミルトニアンは非常によく似ている。両者について各特異点近傍における有理型解の個数を比較することにより、両者の違いを明らかにした。特に藤、鈴木系には自然数 n 位の極を持つ解が存在することを見つけた。これは 4 次元パンルヴェ型方程式にて初めて現れた解であり、第 6 パンルヴェ型方程式では見えなかった解であることを学会報告(2012-9, 九州大)した。藤、鈴木系が最も素直な、笹野系は一寸ひねくれた拡張、新しく坂井により見出された行列型パンルヴェは計算が最も厄介な印象を受けることも合わせ報告した。

(2-3) 藤、鈴木系の退化系 NY^{A4} (野海、山田の $A4$ 型パンルヴェ方程式と同じ)と行列型パンルヴェ IV^{Mat} および II^{Mat} の 3 つは、前 2 者が第 4 パンルヴェ方程式、残り 1 つが第 2 パンルヴェ方程式の拡張であり、それぞれには第 4 パンルヴェ方程式、第 2 パンルヴェ方程式と同じく 1 の 2 乗根、3 乗根を重みとする対称解が存在し、これらを分類したこと、1 つにつき線型モノドロミを計算したことを学会報告した(2013-9, 愛媛大)。 NY^{A4} には原点の近傍に 1 つの正則な対称解と 15 個の 1 位の極を持つ対称解が存在しそれぞれがベックルント変換 $\{s_i (i=0, 1, 2, 3, 4)\}$ で移り合うことを示した。幾何学的に表わすと、3 つの同心正 5 角形の頂点に 1 位の極を持つ対称解が、中心に正則な対称解が配置され、中心から径方向に reflection s_i で移り合い、正 5 角形の辺に沿って反時計方向に rotation で移り合うこと、さらに中心から第 1 の正 5 角形の頂点から第 2 の正 5 角形の 1 つおきの頂点に向かって reflection s_i で移り合うことがわかる。1 位の極を持つ 15 個の対称解はベックルント変換で閉じているが、中心に配置された正則な対称解は rotation で 3 つの同心正 5 角形の外に飛び出す。正則な対称解は別の正 5 角形の辺に沿って反時計方向に rotation で移り合い、各頂点を中心に新たな 3 つの同心正 5 角形の頂点に 1 位の極を持つ対称解が配置され、同様にベックルント変換で移り合うことが分かる。この観点から第 4 パンルヴェ方程式で

は、正 3 角形の中心に正則な対称解が、各頂点に 1 位の極を持つ対称解が配置され、径方向に reflection s_i で移り合い、正 3 角形の辺に沿って反時計方向に rotation で移り合うことが分かる。また近い将来発見されるだろう、 $2n$ 次元の第 4 パンルヴェ方程式には $4n^2$ 個の有理型解が $2n+1$ 個の同心 $2n-1$ 角形の頂点と中心に配置されることが予想される。この内容について Journal of Nonlinear Mathematical Physics に投稿し、すでに発行が確定している(Sept.2014)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

- (1) Kazuo Kaneko, Special solutions and linear monodromy for the two dimensional degenerate Garnier system $G(1112)$, arXiv:1310.2006(査読無)。(本論文は 2013 年 10 月、雑誌 SIGMA に投稿し、現在 referee からの 4 度目の report (final) 待ち。)
- (2) Kazuo Kaneko, Symmetric solutions to the four dimensional degenerate Painleve type equation NY^{A4} , Journal of Nonlinear Math. Physics, (査読有) Vol. **21**, No3, 2014, pp. 357-370.
- (3) Kazuo Kaneko, Yousuke Ohyama, Meromorphic Painleve transcendents at a fixed singularity, Math. Nachr. (査読有) **286**, No. 8-9, 2013, pp. 861-875. DOI 10.1002/mana.200810241.
- (4) Kazuo Kaneko, Symmetric solutions for the two dimensional degenerate Garnier system $G(5)$, Proc. Japan Acad. (査読有) **87**, Ser. A, 2011, pp. 114-118.
- (5) Kazuo Kaneko, Local expansion of Painleve VI transcendent around a fixed Singularity, J. Math. Phys. (査読有) **50**, 2009, pp. 013531-24.

[学会発表](計 7 件)

- (1) 金子和雄, Symmetric solutions to the degenerate four dimensional Painleve type equations NY^{A4} , IV^{Mat} and II^{Mat} . 日本数学会, 2013-9-24, 愛媛大。
- (2) 金子和雄, Special solutions to the four dimensional Painleve type equations $21, 21, 111, 111$ and $31, 22, 22, 1111$ 日本数学会, 2012-9-18, 九州大。
- (3) 金子和雄, 4 次元 Painleve 型方程式 $21, 21, 111, 111$ における pole をもつ特殊解、日本数学会, 2012-3-28, 東京理科大。
- (4) 金子和雄, 4 次元 Painleve 型方程式 $21, 21, 111, 111$ における特殊解と線型モノドロミ、日本数学会, 2011-9-30, 信州大。
- (5) 金子和雄, 2 次元退化 Garnier 系 $G(23)$ にお

- ける対称解と線型モノドロミ、日本数学会,2011-3-23,早稲田大。
- (6) 金子和雄,2次元退化 Garnier 系 $G(5)$, $G(14)$ における対称解と線型モノドロミ、日本数学会,2010-9-24,名古屋大。
- (7) 金子和雄,2次元退化 Garnier 系における対称解と線型モノドロミ、日本数学会,2010-3-27,慶応大。

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
無

6. 研究組織
(1)研究代表者
金子 和雄 (Kaneko Kazuo)
四日市大学、関孝和数学研究所、研究員
研究者番号：50571486

(2)研究分担者
()

研究者番号：

(3)連携研究者
大山 陽介 (Ohyama Yousuke)
大阪大学、大学院情報科学研究科、准教授
研究者番号：10221839