

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 29 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540239

研究課題名（和文）角がある領域における非定常 Navier-Stokes 方程式の数学解析

研究課題名（英文） Mathematical analysis to non-stationary Navier-Stokes equations in the domain with a corner.

研究代表者

田中 尚人（TANAKA NAOTO）

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：00247222

研究成果の概要（和文）：本研究では非圧縮性粘性流体の運動を記述するモデル方程式である Navier-Stokes 方程式を、流体が満たされている領域の境界が滑らかではなく角を持つ場合に研究した。流れが 2 次元流であると仮定し、平面の扇形領域において解析をした。Navier-Stokes 方程式の非線形項(対流項)を無視した線形化方程式に対して、扇形の角の開きの大きさに応じて、解の角での特異性の大きさを分類できた。結果は現在出版準備中である。

研究成果の概要（英文）：In this study we have considered Navier-Stokes equations describing incompressible viscous fluid flow in the domain with a corner point. We assume that flow under consideration is parallel and analyze the problem in a plane sector. For the linearized equation which neglect the nonlinear term (convection term) we succeed to classify the order of the singularity of the solution near the corner according to the width of the angle. The result is in preparation for publication.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：Navier-Stokes 方程式, Stokes 方程式, 角がある領域, 解の特異性

1. 研究開始当初の背景

従来次のことが知られていた：

(1) 領域の境界が滑らかな場合、楕円型及び放物型偏微分方程式(線型の方程式)の解は滑らかである。

(2) 領域の境界が滑らかではない場合(1)のことは成り立たず、解に特異性が現れる。しかし非線型方程式に対する同様の結果は申請者が知る限り皆無であった。

そこで本研究では、応用上も重要である Navier-Stokes 方程式を、角がある領域において考察することとした。

2. 研究の目的

以下の仮定の下で解析する：

- (1) 流れの場は 2 次元流であるとし、領域は平面の扇形領域とする。
- (2) 境界条件は粘着条件(Dirichlet 条件)とする。

この時、Navier-Stokes 方程式の解の一意可解性を示し、扇形の角の開きの大きさに応じて、解の角の近くでの特異性の大きさを分類し評価することを研究目的とする。

3. 研究の方法

以下の順序で解析する：

- (1) 従来得られている線型の方程式に対する角がある領域における結果を精査し、手法を吟味し必要に応じて改良を加える。
- (2) Navier-Stokes 方程式を線型化して得られる Stokes 方程式の解を熱方程式と Poisson 方程式の解に分解し、それぞれについて扇形領域における解の特異性を調べる。
- (3) (2)の結果を用いて非線型問題 (Navier-Stokes 方程式)を扇形領域において解析する。

4. 研究成果

一般に偏微分方程式を考える領域の境界が滑らかな場合、ラプラス方程式やポアソン方程式に代表される楕円型方程式及び熱方程式に代表される放物型方程式の解は、データに滑らかさを仮定しなくても解は滑らかになるが、領域の境界に角などの特異性がある場合には、たとえデータに滑らかさを仮定しても、角の付近で解に特異性が現れる。このことはたとえば円領域(領域の境界が滑らかな場合)と扇形領域の場合(滑らかではない場合)に、解を固有関数で展開し、無限級数で具体的に表示してみると、その様相が明らかになる。即ち円領域の場合は動径方向の変数の冪が自然数になるので、これについて微分していくといずれは 0 になり解はいつまでも滑らかであるのに対し、扇形領域の場合には動径方向の変数の冪は扇形の角の開きの大きさに応じた分数になり、従ってこれについて微分していくといつかは負冪が現れ、角(原点)の近くで特異性が現れるのである。

領域の境界が滑らかではない場合の線型

偏微分方程式の研究は、V. A. Kondratiev (1967) の先駆的な研究に始まり、現在まで様々な結果が得られているが、これらはすべて解の角の付近での特異性の程度を見積もる関数空間の重みの冪は不等式で与えられ、最適ではなかった。そこで本研究ではこの点を改良し、角の開きの大きさに応じた最適な重み関数を考えることにより、解の角の付近での挙動が一目瞭然である形の評価式を導くことが出来た。

具体的には、Navier-Stokes 方程式の非線型項(対流項)を無視することにより線型化した方程式 (Stokes 方程式) の解を、非圧縮性の空間における熱方程式の解と、圧力の勾配部分を表わす Poisson 方程式の解に分解し、それぞれについて扇形領域で解析を行った。その際論文 (B-V) B. V. Bazaliy, N. Vasylyeva, Initial-boundary value problems in a plane corner for the heat equation, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010(2010), No. 90, pp. 1-32. で使われている手法を参考にした。(B-V)では解の評価を、関数の最良近似度よりなめらかさを見積もる S. N. Bernstein の定理により求めており、近似解の構成は D. Jackson の方法に従っている。本研究では(B-V)で用いられている手法を整備し、無限級数あるいは積分核で書かれている関数のヘルダー評価を求める方法を汎用性のある形で表わすことが出来た。

以上の結果は現在出版準備中である。

引き続き今回得られた結果を用いて、通常の逐次近似法により非線形問題 (Navier-Stokes 方程式)を解析する予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

1. Itoh, Hiromichi; Khludnev, A. M.; Rudoy, E. M.; Tani, Atusi, Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity. ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 査読有, 92 (2012), no. 9, 716-730.
2. Honda, Hirotada; Tani, Atusi, Small-time existence of a strong solution of primitive equations for the ocean. Tokyo J. Math., 査読有, 35 (2012), no. 1, 97-138.
3. Liapidevskii, V. Yu.; Pukhnachev, V. V.; Tani, Atusi, Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell

medium. Wave Motion, 査読有, 48 (2011), no. 8, 727-737.

4. Kono, Shintaro; Tani, Atusi, On the Hasegawa-Wakatani equations with vanishing resistivity. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 査読有, 87 (2011), no. 9, 156-161.

5. Kondo, Shintaro; Tani, Atusi, Initial boundary value problem of Hasegawa-Wakatani equations with vanishing resistivity. Adv. Math. Sci. Appl., 査読有, 21 (2011), no. 1, 223-253.

6. Lyubanova, A. Sh.; Tani, Atusi, On inverse problems for pseudoparabolic and parabolic equations of filtration. Inverse Probl. Sci. Eng., 査読有, 19 (2011), no. 7, 1023-1042.

7. Lyubanova, A. Sh.; Tani, Atusi, An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration: the existence, uniqueness and regularity. Appl. Anal., 査読有, 90 (2011), no. 10, 1557-1571.

8. Kondo, Shintaro; Tani, Atusi, Initial boundary value problem for model equations of resistive drift wave turbulence. SIAM J. Math. Anal., 査読有, 43 (2011), no. 2, 925-943.

9. Ito, Hiromichi; Kovtunenکو, Victor A.; Tani, Atusi, The interface crack with Coulomb friction between two bonded dissimilar elastic media. Appl. Math., 査読有, 56 (2011), no. 1, 69-97.

10. Nakano, Naoto; Tani, Atusi, Navier's slip problem for motion of inhomogeneous incompressible fluid-like bodies. J. Math. Fluid Mech., 査読有, 13 (2011), no. 1, 65-87.

11. Itoh, Shigeharu; Tanaka, Naoto; Tani, Atusi, On some boundary value problem for the Stokes equations with a parameter in an infinite sector. New directions in mathematical fluid mechanics, Adv. Math. Fluid Mech., 査読有, Birkhauser Verlag, Basel, (2010), 223-236.

12. Kurokiba, Masaki; Tanaka, Naoto; Tani, Atusi, Maximal attractor and inertial set for Eguchi-Okii-Matsumura equation, J. Math. Anal. Appl., 査読有, 365 (2010), no.

15, 638-645.

13. Maruo, Kenji; Naoki, Yamada, Existence of non-radially symmetric viscosity solutions to semilinear degenerate elliptic equations with radially symmetric coefficients in the plane, part II. Differ. Equ. Appl., 査読有, 2 (2010), no. 3, 377-408.

14. Honda, Hirotsada; Tani, Atusi, Small-time existence of a strong solution of primitive equations for the atmosphere. Adv. Math. Sci. Appl., 査読有, 20 (2010), no. 2, 547-583.

15. Khludnev, A. M.; Kovtunenکو, V. A.; Tani, Atusi, On the topological derivative due to kink of a crack with non-penetration. Anti-plane model. J. Math. Pures Appl., 査読有, (9) 94 (2010), no. 6, 571-596.

16. Nakano, Naoto; Tani, Atusi, An initial-boundary value problem for motion of inhomogeneous incompressible fluid-like bodies. Adv. Math. Sci. Appl., 査読有, 20 (2010), no. 1, 11-35.

17. Xu, George X.; Liu, G. R.; Tani, Atusi, An adaptive gradient smoothing method (GSM) for fluid dynamics problems. Internat. J. Numer. Methods Fluids, 査読有, 62 (2010), no. 5, 499-529.

[学会発表] (計 0件)

[図書] (計 0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :

番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等 該当なし。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 尚人 (TANAKA NAOTO)
福岡大学・理学部・教授
研究者番号：00247222

(2) 研究分担者

山田 直記 (YAMADA NAOKI)
福岡大学・理学部・教授
研究者番号：50030789

(3) 連携研究者

谷 温之 (TANI ATUSI)
慶応義塾大学・名誉教授
研究者番号：90118969

伊藤 成治 (ITOH SHIGEHARU)
弘前大学・教育学部・教授
研究者番号：40193487