

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 19 日現在

機関番号：22604
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2010～2012
 課題番号：22540396
 研究課題名（和文）固有値と固有空間の新奇なホロノミー

研究課題名（英文）Exotic quantum holonomy in eigenvalues and eigenspaces

研究代表者

田中 篤司 (TANAKA ATUSHI)
 首都大学東京・理工学研究科・助教
 研究者番号：20323264

研究成果の概要（和文）：固有値や固有空間の新奇な量子ホロノミー(全のアンホロノミーとも呼ばれる)とは、量子系の固有値や固有空間が、パラメータに対して多価性を帯びる現象のことである。本研究課題では、既存の新奇な量子ホロノミーの一般論を進展させると同時に、多自由度系あるいは多体問題での新しい例題を得た。現在でも新奇な量子ホロノミーは純理論的な研究課題であるが、実験的な研究との距離を縮めることができた。

研究成果の概要（英文）：The geometric phase is the most famous example of quantum holonomy, where an adiabatic cycle induces a nontrivial change for Examples of the quantum holonomy of exotic kind (also known as Cheon's anholonomies) have been found, where eigenenergies (or quasienergies) as well as eigenspaces of bound states exhibit multiple-valuedness in the parameter space. Through this research project, the theory of the exotic quantum holonomy has been further developed. Also, new examples of the exotic quantum holonomy have been found. Although the present results are purely theoretical, it is expected that the further study along this line will lead to the experimental realization of the exotic quantum holonomy.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	650,000	150,000	800,000
2011年度	1,040,000	240,000	1,280,000
2012年度	650,000	150,000	800,000
総計	2,340,000	540,000	2,880,000

研究分野：非線形物理、量子物理、特に量子カオス

科研費の分科・細目：数理物理・物性基礎

キーワード：新奇な量子ホロノミー、例外点、量子回路、フロケ作用素、量子写像

1. 研究開始当初の背景

階層性を持つ量子系の解析の第一歩は、遅い自由度をゆっくり変動するパラメーターとみなした上で、速い自由度にのみ量子論を適用することである。この意味で、パラメーターを持つハミルトニアン、あるいはフロケ作

用素の固有値問題は物理学の基本問題である。特に固有値のパラメーター依存性は、分子系のボルン・オープンハイマー近似における断熱ポテンシャル面や、固体物理におけるバンド構造のように重要な情報をもたらす。一方、量子状態の位相のパラメーター依存性

についてはベリーの研究(1984)を契機として、その重要性が広く認識されるようになった。ベリー位相は、量子状態を持つ位相のうち、パラメーター空間中の幾何的な構造に由来し、しかも、ある種の多価性、より正確には、微分幾何学におけるホロノミーを反映する。

対して、ハミルトニアン束縛状態の固有エネルギーがパラメーターの多価関数となる例が、全によって報告された (Cheon 1998)。このような例は、私の知る限りにおいては、既存の断熱ポテンシャル面やバンド構造の莫大な研究からの報告は無く、予見不能なものだった。これは固有値(固有エネルギー)のアンホロノミーと呼ばれる。この固有値の多価性は、対応する固有空間(固有ベクトルの向き)の多価性、すなわち、固有空間のアンホロノミーを誘発する。これらのアンホロノミーを総称し、新奇な量子ホロノミー(あるいは全のアンホロノミー)と呼ぶ。

全の報告から約 10 年後、私と宮本博士(当時早稲田大)は、二行二列のフロケ行列(ユニタリ行列)で記述される系が新奇な量子ホロノミーを示すことを報告した (PRL 2007)。そこでは、二つの固有値(周期外力系での擬固有エネルギー)がパラメーター空間内でメビウスの輪の構造を成して繋る。この発見は、新奇な量子ホロノミーの本質を掘り下げる契機を与えた。

これを説明するため、まず、ベリー位相のゲージ理論的な扱いに触れる。ここでは、位相についての“ゲージ変換”により、固有状態の位相を多価ではなく一価のものに変換できる一方、その代償として、有効的なベクトルポテンシャルが現われる (Mead and Thruhar 1979)。実は、これは確率振幅のホロノミーに着目した処方である。藤川は、これを基底ベクトルの多価性に転嫁する定式化を与えた (Fujikawa 2005)。

固有空間の新奇なホロノミーを扱うには、確率振幅のみに着目することは許されず、むしろ、藤川の方法から出発することが必要だ。全教授(高知工大)と私は、藤川の方法を土台として、ベリー位相と固有空間の新奇なホロノミーを統一的に扱う定式化を見いだした (EPL 2009, Ann. Phys. 2009)。そこでは、有効的なベクトルポテンシャルは(固有値縮退の有無と独立に)非アーベル的であり、その経路順序積から定まる“ホロノミー行列”が、位相のホロノミーと固有空間のアンホロノミーを特徴付ける。

ベリー位相とパラメーター空間中でのエネルギー準位の交差には密接な関係がある。Kim 准教授 (Pusan Nat. Univ.)、全教授(高知工大)と私は新奇な量子ホロノミーでの類似の対応を明らかにした：複素数に拡張されたパラメーター空間での縮退点、すなわち、

加藤の分類(1966)によるところの例外点が、固有値の新奇なホロノミーの構造を定める。さらに、二行二列のユニタリ行列の例については、ホロノミー行列が、例外点のゲージポテンシャルの留数で定まる。これは、一般的に成立するか否かは未解明だが、ベリー位相に対する有効的な磁気単極子からの寄与を彷彿とさせる結果である。

数理的な進展としては、Viennot が、ファイバーバンドルの拡張である Abelian gerbs による新奇な量子ホロノミーの定式化を、我々の定式化とは別に、提唱した (J. Phys. A, 2009)。

応用例として、断熱量子計算 (Farhi ら 2000) を、新奇なホロノミーを用いて再定式化し、既存の手法と較べた速度向上の可能性を示唆した (PRL 2007)。断熱量子計算を律速するものは狭い固有値ギャップだが、我々の手法は、狭い固有値ギャップを押し広げるパラメーターが導入できる。ただし、現時点では、我々の手法の検討は限られたもので、根本准教授(当時、国立情報学研)との共同研究を通じて、簡単な例題での検討と、量子回路模型との計算量論的な等価性を示したに留まっている (PRA 2010)。

2. 研究の目的

(1) 新奇な量子ホロノミーの物理における意義を明らかにする

上述したように、新奇なホロノミーの知見はある程度は蓄積した。しかしながら、それらは人工的な模型達と形式的な理論に限られ、それらの、例えばベリー位相と比較した場合の、物理的な含意の落差が極めて大きいことに強い不満を感じる。しかしながら、これを解消することは、具体的かつ個別的な検討の先にしかあり得ない。

特に、二準位系で得た、固有空間の新奇なホロノミーと例外点の対応を、一般の多準位系で明らかにする必要がある。これは、ベリー位相の場合の有効的な磁気単極子に対応するものを明らかにする試みである。

(2) 具体例の蓄積、特に、実験的な研究との関連を模索する

目的 (1) とも係わるが、より一般的な系、特に多体問題の中に現われ得る自然な例を探ることが必要である。例えば、上述の、多準位系の研究においても、多体系での例を用いることが自然なはずである。

3. 研究の方法

(1) 新奇な量子ホロノミーの一般論について

既存の、固有空間のアンホロノミーのゲージ理論的な定式化で得られた結論は、ある量のゲージ共変な表式であった。これは美しい

表式を持ち、さらに、既存の位相のホロノミーとの関係も明快である。しかし、物理的に観測可能な量は、ゲージ不変量に限られる。ゲージ共変な表式からゲージ不変量を得るため、試行錯誤を行なった。

(2) 新奇な量子ホロノミーを示す新しい例題の探索

既存の例は、本質的に一自由度系におけるものであった。このため、既存の例を何らかの意味で、多自由度に拡張することを試みた。通例、系の自由度を増大させるには、自由粒子が典型例であるが、複数の系を加法的に拡張する。しかし、加法的な拡張が新奇な量子ホロノミーを保持することは自明ではない。そこで、断熱近似の持つ状態ベクトルの構造を尊重させるような拡張、いわば、乗法的な拡張を試みた。

(3) 新奇な量子ホロノミーと非エルミート量子論

新奇な量子ホロノミーと加藤の例外点との対応が二準位模型にて示された。これを多準位系に拡張すべく、新奇な量子ホロノミーを示す具体例の幾つかについて、非エルミート拡張を調べた。

4. 研究成果

新奇な量子ホロノミーの一般論を進展させ、また、新たな例題を得た。特に、量子多体系における比較的自然的な例題を得たことは特筆に値する。

(1) 時間依存する Aharonov-Bohm の輪での新奇な非断熱的量子ホロノミー

一次元の輪に拘束された荷電粒子のエネルギースペクトルは、輪を貫く磁束に対して周期性を持つことは良く知られている。しかし、固有空間は磁場のゲージに強く依存するため、スペクトルの周期性と新奇な量子ホロノミーとの関係は不明であった。これに対して、固有値と固有空間のアンホロノミー達の対応におけるゲージ依存性を丁寧に解析することで、Aharonov-Bohm の輪に内在する新奇な量子ホロノミーの存在を明らかにした。同時に、この系は、非断熱的な設定での新奇な量子ホロノミーの最初の例でもある (論文 [4]。全卓樹教授 (高知工科大)との共同研究)。

(2) 固有空間のアンホロノミーのゲージ不変量

固有空間のアンホロノミーでは、(擬)固有エネルギーに縮退が無い場合であっても、パラメータ空間中の閉経路における断熱的な時間発展が複数の定常状態同志を交換させる。閉経路の前後での定常状態間の重なり

積分は、この現象を定量化する方法を与え、ホロノミー行列と呼ばれる。これまで、ホロノミー行列のゲージ共変な表式が知られていたが、これは、Wilczek-Zee のホロノミーと同様に、必ずしも観測可能量を特定するものではない。これに対して、適切なゲージを見いだすことで、ホロノミー行列の標準形を求め、そこに内在するゲージ不変量を明らかにした。それらは、非対角的幾何学的位相と、置換行列である。量子回路の空間における閉経路の分類を通じて、これらのゲージ不変量と、Kitagawa ら (2010)の導入した周期外力系のトポロジカル整数とを比較した (論文 [1]。全卓樹教授 (高知工科大)および Kim 准教授 (Pusan Nat. Univ.)との共同研究)。

(3) 階層的な量子回路での複雑な固有空間のアンホロノミー

量子回路を階層的に接合した模型が新奇な量子ホロノミーを持つことを示した。これは幾分人為的な模型ではあるが、さまざまなパラメータを変えることが可能である。このため、固有空間のアンホロノミーのゲージ不変量を調べることに格好の例題を提供する。非対角幾何学位相については単純な結果を得た。一方で、この模型のパラメータが一般的な値を取る場合、置換行列を求めるには、subset-sum と呼ばれる NP 完全問題の解が必要であることを示した。この意味で、複雑なアンホロノミーを持つ例題を得たことになる (論文 [1, 3]。全卓樹教授 (高知工科大)および Kim 准教授 (Pusan Nat. Univ.)との共同研究)。

(4) 量子回路・量子写像の断熱定理

量子写像と量子回路は新奇な量子ホロノミーを持つ系の例題として重要である。一方、これらの系は離散時間中で時間発展する。このため、対応する断熱定理の証明は、通常の連続時間のものとは異なるはずである。これまで、A. Dranov, J. Kellendonk and R. Seiler による証明 [J. Math. Phys. 39, 1340 (1998)] が知られていたが、より簡素な証明を与えた (論文 [2])。

(5) 一次元ボース系での新奇な量子ホロノミー

一次元ボース系は、その結合強度を変化させることで、自由ボゾン系、Tonks-Girardeau 系、super Tonks-Girardeau 系、自由ボゾン系の順番に閉じた径路を構成することができる。これが新奇な量子ホロノミーを誘発することを示した。さらに、二体ボーズの場合について、加藤の例外点との関連を調べた (論文は投稿中。米澤信拓博士 (阪市大数研)、および、全卓樹教授 (高知工科大)との共同研究)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

[1] Atushi Tanaka, Taksu Cheon and Sang Wook Kim, Gauge invariants of eigenspace and eigenvalue anholonomies: Examples in hierarchical quantum circuits, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有り, Vol. 45, 2012, 335305-1-335305-20

DOI: 10.1088/1751-8113/45/33/335305

[2] Atushi Tanaka, Adiabatic Theorem for Discrete Time Evolution, Journal of the Physical Society of Japan, 査読有り, Vol. 80, 2011, 125002-1-125002-2

DOI: 10.1143/JPSJ.80.125002

[3] Atushi Tanaka, Sang Wook Kim and Taksu Cheon, Eigenvalue and eigenspace anholonomies in hierarchical systems, Europhysics Letters, 査読有り, Vol. 96, 2011, 10005-p1-10005-p6

DOI: 10.1209/0295-5075/96/10005

[4] Atushi Tanaka and Taksu Cheon, Quantum anholonomies in time-dependent Aharonov-Bohm rings, Physical Review A, 査読有り, Vol. 82, 2010, 022104-1-022104-6

DOI: 10.1103/PhysRevA.82.022104

[5] Sang Wook Kim, Taksu Cheon and Atushi Tanaka, Exotic quantum holonomy induced by degeneracy hidden in complex parameter space, Physics Letters A, 査読有り, Vol. 374, 2010, 1958-1961

DOI: 10.1016/j.physleta.2010.02.058

[学会発表] (計 9 件)

1. 田中篤司, 米澤信拓, 全卓樹, 一次元ボーズ系での固有値・固有空間のアンホロノミー: (II) 隠れた複素縮退点, 日本物理学会第 68 回年次大会, 2013 年 3 月 28 日, 広島大学 東広島キャンパス

2. 田中篤司, 固有値と固有空間のアンホロノミー, 応用解析研究会, 2012 年 11 月 17 日, 早稲田大学西早稲田キャンパス

3. 田中篤司, 全卓樹, kicked top における固有空間と固有値のアンホロノミー, 日本物理学会 2012 年秋季大会, 2012 年 9 月 21 日, 横浜国立大学

4. Tanaka, Atushi, Exceptional points behind eigenspace and eigenvalue anholonomies of bound states, Non-Hermitian Operators in Quantum Physics (PHHQ XI), 2012 年 8 月 28 日, University Paris Diderot, Paris, France

5. 田中篤司, 全卓樹, Sang Wook Kim, 固有空間と固有値のアンホロノミーでのゲージ不変量, 日本物理学会 2012 年年次大会, 2012 年 3 月 24 日, 関西学院大学西宮上ヶ原キャンパス

6. 田中篤司, 固有空間・固有値のアンホロノミーでのゲージ不変量, 量子論の諸問題と今後の発展, 2012 年 3 月 17 日, 高エネルギー加速器研究機構つくばキャンパス

7. 田中篤司, 量子写像および量子回路での断熱定理, 日本物理学会 2011 年秋季大会, 2011 年 9 月 23 日, 富山大学五福キャンパス

8. 田中篤司, 全卓樹, Sang Wook Kim, 固有値・固有空間のアンホロノミーの階層的構成, 量子科学における双対性とスケール, 2010 年 11 月 4 日, 京都大学基礎物理学研究所

9. 田中篤司, 全卓樹, Sang Wook Kim, 多準位系での固有値・固有空間のアンホロノミーの階層的構成, 日本物理学会第 64 回秋季大会, 2010 年 9 月 26 日, 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス

[その他]

ホームページ等

<http://researchmap.jp/tanaka-atushi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 篤司 (TANAKA ATUSHI)

首都大学東京・理工学研究科・助教

研究者番号: 20323264

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

全卓樹 (CHEON TAKSU)

高知工科大学・工学部・教授

研究者番号: 60227353