

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 13 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22560061

研究課題名(和文) 多項式計画問題の半正定値緩和法に対する頑健な数値計算手法の開発

研究課題名(英文) On robust numerical methods of semidefinite relaxation for polynomial optimization problems

研究代表者

村松 正和 (Muramatsu, Masakazu)

電気通信大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：70266071

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：錐線形計画問題に対する Facial Reduction Algorithm (FRA) の理論を整備した。今まで知られていた錐拡張法と FRA が互いに双対の関係にあることを明らかにした。多項式計画問題(POP)のSDP緩和問題に許容解が無いのに、それを(通常のソルバーで)解くとPOPの最適値が得られる例がかなりある。この現象の理由をある程度解き明かし、また、この性質を用いた新しい POP の SDP 緩和法を提案した。

研究成果の概要(英文)：We established the theory of facial reduction algorithm (FRA) for conic linear optimization problems, and prove that the conic expansion approach is dual to FRA. For SDP relaxation for polynomial optimization problems (POPs), sometimes we can compute the optimal value of POP by solving the SDP relaxation problem although the SDP problem is infeasible. We elucidated the reason of this phenomena, and proposed a new SDP relaxation scheme using this property.

研究分野：工学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎・工学基礎

キーワード：最適化 錐線形計画 多項式計画 半正定値計画

1. 研究開始当初の背景

多項式を用いて構成される多項式計画問題 (Polynomial Optimization Problem; 以下 POP) は、幅広い応用を持つ最適化問題であるが、同時に NP 困難で解きにくいことで知られている。研究提案当時、POP に対する半正定値計画 (Semidefinite Programming; 以下 SDP) 緩和法が提案され、研究が盛んに進められていた。

POP に対する SDP 緩和法では、POP の最適値の下界を計算する SDP 問題の列を定義し、これらの SDP 問題の最適値の列が POP の最適値に収束する、ということが理論的に知られている。SDP 問題は凸最適化問題であり、主双対内点法等で効率よく解かれる。つまり、この手法により構成される SDP 問題をどんどん解いていけば、いずれその POP の最適値が得られる仕組みになっている。

SDP 緩和法は理論的にはすっきりしており、POP の最適値を計算することができる魅力的な方法であるが、実際に POP に適用してみると、変数の数が多くなりすぎたり、また、解くべき SDP が数値的に不安定になったりする事例が多く見られ、その適用に関しては限界があることが認識されていた。実際、一般的な POP だと、10 変数以上サイズでもなかなか解くことが難しい。

元々 NP 困難な問題であるので、一般的な問題を解くことは難しいが、特殊な場合、例えばある種の疎性を持つ場合に、効率良く行列を縮小したり、変数のサイズを落としたりすることができるということが知られている。

本研究は、POP の SDP 緩和問題が持つ数値的困難さを直視し、その原因究明を目指すと共に、ある意味 POP の種類を制限した場合に、効率的なアルゴリズムが構築できないかを探るものである。

2. 研究の目的

POP に対する SDP 緩和において、面的削減法 (Facial Reduction Algorithm; 以下 FRA) を用いて計算量を削減したり、数値的安定性を増したりすることが研究の目的であった。

FRA は、SDP が提案されるはるか以前に、凸計画問題に対して提案された手法である。FRA は与えられた最適化問題を、内点許容解のある、ある意味で等価な最適化問題に変換する。一般に、内点許容解が存在する錐計画問題は、数値的に安定していることが知られている。そこで FRA を錐計画問題、特に SDP に適用し、もって数値的困難を避けたり、変数の数を削減することを目的とした。

3. 研究の方法

研究は、錐計画問題に対する FRA の理論を整備することから始まった。続いて、POP に対する SDP 緩和に関して、どのような数値的困難があるのかを調べ、さらに、これを回避する方法を考えた。また、既存の手法に関して、これが FRA の特殊ケースと考えられることを見いだした。

FRA を実行するには、各反復で「同次化された双対問題の解」が必要となる。この同次化された双対問題の解を求めるのは、一般に元の (悪条件の) 問題を解くと同じ程度に困難である。これが、おそらく 30 年前に提案されながら、FRA がほとんど黙殺されてきた理由と考えられる。

しかしながら、POP の SDP 緩和という特殊な状況では、これを代数的あるいは数値的に行える可能性がある。例えば、POP が等式制約を持てば、それを用いて同次化双対問題の解を構成することができ、もって FRA の一反復を行うことができる。等式制約は、多項式を両辺にかけることにより新たな (冗長な) 等式制約を生み出すことができ、これを用いて FRA の反復を行なうことができる。このように考えると、等式制約が生成するイデアルを用いて FRA を (部分的に) 記述できる可能性がある。研究においては、このような可能性を追究した。

4. 研究成果

- (1) 疎性を持つ POP に対し、FRA を代数的に適用することにより計算すべき行列のサイズを小さくすることを提案した。従来から行なわれているある種の疎性活用法が、提案手法の一部とみなせることを示した。
- (2) 錐線形計画に対する FRA の理論的側面を整備し、まとめた。錐線形計画に対する FRA の適用に関して、一定の道筋をつけた。また、FRA と錐拡大法との間の双対関係を明らかにした。これらは完全に双対と言うわけではなく、ある種の FRA の適用が錐拡大の双対に該当していることになる。一般に、FRA はよりきめ細かく適用することができる。
- (3) POP に対する SDP 緩和の例題で、SDP solver が正確な値を返せない例について、その原因究明を行なった。また、多倍長数値計算を行なって SDP を解くソフトウェア SDPA-GMP を用いて例題の数値計算を行った。
- (4) 完全正値行列の判定問題について、POP を用いた定式化を行い、その数値実験を行なった。これを他のさまざまな方法を比較した。結果として、

あまり POP による定式化は良くないことがわかった。そのため、新たな判定方法の提案を行ない、その数値実験などを行なった。

- (5) (3) において、SDP ソルバーは正確な最適値を返さないが、その「正確でない値」が実は POP の最適値であることがわかった。このような現象に理由がないわけではない。そこで、実代数幾何の手法を用いて、そのような現象が起きるための一般的な理論を展開し、理由を明らかにした。
- (6) 上記の理論を応用し、POP がある種の疎性を持つ場合に、極めて少数の変数からなる SDP 緩和問題を構成する手法を提案した。緩い条件のもとで提案手法の最適値への収束を証明するとともに、数値実験を行なって提案手法の有効性を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1. Facial reduction algorithms for conic optimization problems”, H. Waki, and M. Muramatsu, Journal of Optimization Theory and Applications. 158 (2013) 188-215. (査読有) DOI: [10.1007/s10957-012-0219-y](https://doi.org/10.1007/s10957-012-0219-y)
2. Strange behaviors of interior-point methods for solving semidefinite programming problems in polynomial optimization”, H. Waki, M. Nakata, and M. Muramatsu, Computational Optimization and Applications, 53(2012) 823-844. (査読有) DOI: [10.1007/s10589-011-9437-8](https://doi.org/10.1007/s10589-011-9437-8)
3. An extension of the elimination method for a sparse SOS polynomial”, H. Waki and M. Muramatsu, Journal of the Operations Research Society of Japan, 54(2011)161-190. (査読有) http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/e_mag/Vol.54_4_161.pdf
4. A facial reduction algorithm for finding sparse SOS representations”, H. Waki and M. Muramatsu, Operations Research Letters, 38(2010) 361-365. (査読有) DOI: [10.1016/j.orl.2010.05.011](https://doi.org/10.1016/j.orl.2010.05.011)

[学会発表](計 6 件)

1. “低ランク整数完全正値行列の判定について”, 川瀬 弘樹, 村松 正和, 高橋里司. 2014年日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会. 2014年3月,

大阪.

2. “2次元トーラスグラフ上での情報拡散ゲームにおけるナッシュ均衡”, 祐成友樹, 村松正和, 2013年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会. 2013年9月, 徳島.
3. “Adaptive SDP relaxation for polynomial optimization”, M. Muramatsu, International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT 2013), 2013年7月, リスボン.
4. “A perturbed sums of squares theorem for polynomial optimization and its applications”, Masakazu Muramatsu, Levent Tuncel, and Hayato Waki. International Symposium on Mathematical Programming (ISMP2012), 2012年8月, ベルリン.
5. “多項式計画に対する半正定値緩和”, 村松正和, 組合せ最適化セミナー(第9回) 2012年7月 京都大学 [招待講演].
6. The facial reduction algorithm for semidefinite programming relaxation of polynomial optimization problems”, M. Muramatsu, 11th International Workshop on High Performance Optimization Techniques (HPOPT2010), 2010年7月, Tilburg, the Netherlands. [招待講演]

[図書](計 1 件)

(書籍)

「あたらしい数理最適化-Gurobi と Python 言語で解く-」久保幹雄, J. Pedro Pedroso, 村松正和, Abdur Rais, 近代科学社 (2012).

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

村松正和 (MURAMATSU MASAKAZU)

電気通信大学・情報理工学研究科・教授

研究者番号：70266071

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：