

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 4 日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22560068

研究課題名（和文） 超離散化法による粒子系セルオートマトンモデルの構築

研究課題名（英文） Construction of particle cellular automata models using the ultradiscretization method

研究代表者

松木平 淳太 (MATSUKIDAIIRA JUNTA)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：60231594

研究成果の概要（和文）：4近傍粒子セルオートマトンのルールを Max-Plus 代数で表し、その一般解を得ることに成功した。またその一般解を用いて、漸近挙動を解析することにも成功した。さらに 5近傍粒子セルオートマトンに対して、基本図から Max-Min 束による表現を得ることに成功した。超離散 Cole-Hopf 変換後の方程式、Lagrange 表現の式も同様に基本図から得られる。ECA に関しても、Max-Min 束を用いて、一般解を得ることに成功した。

研究成果の概要（英文）：We have succeeded in obtaining the general solutions for four-neighborhood particle cellular automata using expression of rules in terms of Max-Plus algebra. We have also succeeded in analyzing asymptotic behavior of the general solutions. Furthermore, we have obtained Max-Min-Plus expressions for five-neighborhood particle cellular automata from fundamental diagrams. The equation transformed by ultradiscrete Cole-Hopf transformation and Lagrange representation of the equation are also obtained. We have succeeded in obtaining the general solutions of ECA using Max-Min lattice.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2500,000	750,000	3,250,000

研究分野：応用数学、数理物理学

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎・工学基礎

キーワード：セルオートマトン、超離散、Max-Plus、粒子系、束

1. 研究開始当初の背景

非線形な離散モデルは、近年のコンピュータの処理能力の増大にともなって、ますます注目を集めるようになってきている。なかでもセルオートマトンモデルは、すべての量が離散化されているというコンピュータへの

親和性から、計算機科学、流体力学、統計物理、複雑系や人工生命などの幅広い分野に应用されている。

そういった研究の流れの中で、研究代表者は共同研究者とともにソリトン方程式から可積分なセルオートマトンを導く超離散化と呼ばれる一般的な手法を提案した。

これはソリトンとセルオートマトンを自然な極限操作で結びつけることに成功した画期的成果であり、この分野の国内外の研究者に大きな影響を与え、超離散系という世界的レベルでの大きな研究の流れを生み出した。さらに、この手法は連続体モデルとセルオートマトンをいかに対応付けするかという未解決の問題への一つの回答にもなっており、ソリトン系以外の他分野への応用も期待できるものである。

近年、渋滞形成のメカニズムを記述する交通流モデルの研究が盛んになっているが、これらにおいても、連続体モデルである流体モデルと、離散モデルである粒子モデル・セルオートマトンモデルが存在する。1998年、西成、高橋は、流体モデルである Burgers 方程式とセルオートマトンモデルである Rule184 が、超離散化法によって対応付けられることを明らかにした。これは流れや密度の場を超離散化したもので、場に注目した Euler 表現における対応である。

他方、交通流モデルにおいては粒子の軌跡に注目した Lagrange 表現も存在する。実測データ、統計平均等のマクロな振舞いを考えるときには Euler 表現が便利であるが、ミクロな原理からモデルを構築する場合は Lagrange 表現が便利である。研究代表者は、交通流セルオートマトンモデルである Rule184 の Euler 表現と Lagrange 表現を対応づける Euler-Lagrange 変換を発見することに成功した。これはセルオートマトンの超離散表現 (Max-Plus 代数を用いた表現) 間の明示的な変換式であり、超離散化法に新たな方向性を与えるものであると思われる。これら一連の超離散化手法に関する研究成果は、交通流モデルを含む自己駆動粒子セルオートマトン系の基礎・応用研究の発展に多に貢献し、この分野の著しい発展の原動力の一つとなっている。

そういったなかで、研究代表者は、最適速度追従モデル (OV モデル、Optimal Velocity Model) の超離散化に成功した。OV モデルは交通渋滞発生時のメタ安定状態を再現し、ミクロなモデルとして精度が高いと言われており、その超離散化に成功したことは大きな成果である。また、超離散化法の観点から見ると、これは Lagrange 表現において超離散化に成功した初めての例であり、超離散化の手法における Euler-Lagrange 対応の構築に大きな手掛りを与えるものとなり得る結果であった。本研究はこのような背景のもと、本研究を開始した。

2. 研究の目的

上記の背景のもと、本研究は当初、以下を目的とした。

(1) 最適速度追従モデル (OV モデル) における Euler-Lagrange 対応の解明

粒子系である OV モデルは Lagrange 表現のモデルであるが、その Euler 表現の対応物はまだ明らかになっていないので、それを解明することを目的とする。

(2) ソリトン系 (可積分系) における粒子系の超離散化および Euler-Lagrange 対応の解明

Euler-Lagrange 対応は、交通流モデルにおける研究が先行しているが、超離散化法の発祥元である ソリトン系においてはほとんど明らかになっていない。また、可積分系においては Lagrange 表現の超離散化も明らかになっていない。可積分系における粒子系である箱玉系、Calogero-Moser 系に対して、これらを構築することを試みる。

(3) 他の粒子系モデルにおける超離散化モデルの構築

上記以外のモデルに対しても、超離散化、Euler-Lagrange 対応の構築を試みる。例えば、自己駆動粒子系としての OV モデルを生物の集団運動に適用する試みとして、杉山らによる 2 次元 OV モデルがある。交通流モデルとしての OV モデルの超離散化はすでに成功しているので、2 次元のモデルを超離散化することを試みる。また、杉山らのモデルに拘泥せず、新たなモデルを構築することも試みる。また、Euler-Lagrange 対応を用いて、流体モデルからの知見を導入することも試みる。

(4) モデルの厳密解、近似解の解析

本研究においては上記目標では、超離散化モデル、Euler-Lagrange 対応の構築が中心となるが、研究が順調に進展した場合には、モデルの厳密解や近似解の解析も試みる。OV モデルは 2 階の方程式なので、振動的な振舞いが期待されるが、それに関しては可積分な 2 階差分方程式系である Quispel-Roberts-Thomspon (QRT) 系に関する最近の我々の研究成果を用いる予定である。

3. 研究の方法

当初の研究目的に従って、最適速度追従モデル (OV モデル) における Euler-Lagrange 対応の解明から取り組むことにした。研究代表者が既に発見していた超

離散化された最適速度追従モデル (OV モデル、Optimal Velocity Model)がその特殊例として Rule184 や福井・石橋モデルを含むことに着目し、これらの Euler-Lagrange 対応を再検討することとした。その過程で我々は 1次元 4 または 5 近傍の粒子系セルオートマトンを分類することの重要性に気づいた。そこで、以下の研究方法に従って、この問題をまず考察することとした。

- (1) すべての 4、5 近傍の粒子系セルオートマトンのルールに対して数値シミュレーションを行い、基本図を求める。
- (2) 基本図が区分線形関数で表されるものを抽出し、そのルールを Max-Plus 代数の表現を用いて表す。
- (3) さらに得られた Max-Plus 代数による方程式を超離散 Cole-Hopf 変換を用いて変換し、方程式の漸近挙動を求める。

これらの研究の過程で、Cole-Hopf 変換によって得られた方程式の漸近挙動の解析において、Max と Min を基本演算とする束 (Lattice) が重要な役割を果たしていることを発見した。さらに ECA (Elementary Cellular Automata) が Cole-Hopf 変換によって得られた方程式と同じ形のもので記述できることに我々は気づき、ECA の漸近挙動を Max-Min 束を用いて解析することによって、ECA をクラス分けするというアイデアを得た。そこで、さらに次の研究方法を新たに追加することとした。

- (1) すべての ECA のルールを Max-Min 束を用いて表す。
- (2) 得られた Max-Min 束による方程式を用いて、長時間後の解を Max-Min 束によって表す。
- (3) 得られる解の項数のオーダーによって、ECA のルールを分類する。

この 2つの手法を用いることによって、粒子系以外の一般的なセルオートマトンも含めた形で研究を進めていくこととした。

さらに粒子系に関しては、確率変数を含めた拡張できる可能性があることがわかりつつあり、その方向に沿った研究も同時平行で行いながら、粒子系セルオートマトンの研究を進めていくこととした。

4. 研究成果

研究の結果、以下の成果が得られた。

- (1) Max-Plus 代数を用いた 4 近傍粒子セルオートマトンの漸近解析

65536 個のルールが存在する 4 近傍セルオートマトンの中に、セル状態 1 の数を保存する粒子セルオートマトンは 22 ルール存在する。これらを対称性によって同一視すると、PCA4-1, PCA4-2, PCA4-3, PCA4-4 の 4 つのルールが得られる。我々は PCA4-1, 4-2, 4-3 のルールを Max-Plus 代数で表し、超離散 Cole-Hopf 変換することによって、一般解を Max-Plus 代数で表すことに成功し、この一般解の漸近挙動を解析することによって、基本図を理論的に求めることに成功した。

粒子系セルオートマトンの基本図を理論的に求めることは一部のセルオートマトンのみにしか成功していなかったが、4 近傍以上のセルオートマトンに対して、Max-Plus 代数を用いた手法でこれらが可能になることを示したのは非常に大きな成果である。

この成果は国内外のこの分野に大きな影響を与え、一つの方向性を与えると思われる。また、超離散 Cole-Hopf 変換が重要な役割を果たすということを示したことも非常に意義がある。さらに超離散 Cole-Hopf 変換を導入することによって、Max と Min が作る束の構造が明確になり、解構造を含めた粒子セルオートマトンの代数的な構造に関する一般的な理論構築への道筋ができたことも非常に大きいと言える。

これらの結果をまとめた論文は、査読付きの雑誌論文に掲載されている。

- (2) Max-Plus 代数を用いた 5 近傍粒子セルオートマトンの解析

上記の結果をさらに発展されるために、現在も研究を継続中であるが、5 近傍粒子セルオートマトンに関して既にある程度の結果が得られており、論文雑誌に投稿中である。

5 近傍粒子セルオートマトンの場合は 117 ルールを分類する必要があるが、基本図が区分線形関数で表されるもののうち、26 ルールは基本図の情報を用いることによって、ルールを Max-Min 束で表すことができるという結果を既に得ている。また、超離散 Cole-Hopf 変換された方程式、Euler-Lagrange 変換に得られる Lagrange 表現の方程式も同様に、基本図が求めることができることも示している。

またこれらのルールには、基本図とルールが単純な対応関係にある Type-A と、基本図において隠れた 1 次関数を追加したものとルールが対応する Type-B が存在する。Type-B は 4 近傍には存在しないため、4 近傍だけを対象に解析したときには発見することが困難であった結果であり、今後 N 近傍一般に対する理論を構築する際に、非常に有用となる結果である。

現在、26 ルール間の関係や、確率変数を導

入する可能性について、研究を進めている段階であり、既に本研究の継続的な発展研究として、プロジェクトを進めており、今後大きく発展させることを計画している。

(3) ECA の一般解の Max-Min 束による構成とルールの分類

ECA (Elementary Cellular Automata) に関して、Wolfram による定性的な解の振舞いによるクラス分けが存在するが、解空間を具体的に考察したものは今までになかった。

我々は、粒子セルオートマトンで得られた知見をもとに、ECA256 ルールすべてに対して、方程式が Max-Min 束で表現可能で、かつ一般解の具体的が求まるものを探索した。その結果、Wolfram の分類におけるクラス 1, 2 のルールの多くの中にそのようなルールが存在することを発見した。

一般解を構成する際に、鍵となるのは、Max-Min 束が持つ束としての代数的な性質である。Max-Min 束は分配束と呼ばれるものの一つで、冪等則、可換則、結合則、吸収則、分配則が成り立つ。これらの代数系の法則を用いることによって、ECA の一般解を具体的に求めることができる。この手法によって、時間ステップ n に対して、項の数が $0(1)$, $0(n)$, $0(n^2)$ となる一般解を多くの ECA に対して得た。また、これらの解が時間ステップ n において解になっていることの証明も具体的に与えている。

この研究成果は、セルオートマトンの研究に束と呼ばれる代数が有効であることを示す画期的な結果であり、今後のこの研究分野の方向性に多大な影響を与えることが期待される。さらに方程式は整数値や実数値上のものに限定する必要はなく、束をなす集合であれば、どのようなものにも適用することが可能であるので、セルオートマトンの枠組み自体をより広いものに広げる可能性を含んでいる。

この研究成果は論文雑誌に投稿中であるが、現在も継続して研究を進めており、可積分な方程式の解空間との類似性などを意識して研究の方向性を考えている。もしこの方向へ発展すれば、可積分系をも含めた力学系の研究へも大きな影響を与える可能性がある。また、国内外において、我々の観点で研究を行っている研究グループは全く存在せず、非常にオリジナルな研究分野を創出する可能性も秘めている。

さらに、束という代数的な一般性のために、組合せ論やグラフ理論など離散数学、計算機科学との接点もあり、他分野の研究者との共同研究の可能性も十分あり得ると思われる。情報収集等も同時に含め、検討中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

① 池上 貴俊, 高橋 大輔, 松木平 淳太, 束と ECA, 九州大学応用力学研究所研究集会報告, 査読有, 23A0-S7, p13-18 (2012)

② Daisuke Takahashi, Junta Matsukidaira, Hiroaki Hara and Bao-Feng Feng, Max-plus analysis on some binary particle systems, J. Phys. A. 査読有, Vol 44, 135102(2011)

[学会発表] (計 5 件)

① Junta Matsukidaira, Max-min-plus expressions for one-dimensional particle cellular automata obtained from fundamental diagram, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2013, 2013 年 3 月 16 日 ~ 2013 年 3 月 19 日, 京都大学

② 奥村 敬済, 松木平 淳太, 基本図による 5 近傍粒子セルオートマトンの解析, 日本応用数理解学会, 2012 年 3 月 9 日, 九州大学伊都キャンパス

③ 松木平 淳太, セルオートマトンの漸近挙動の解析 — 数式処理による Max-Min 計算, 研究集会/数式処理 — その研究と目指すもの, 2011 年 12 月 9 日, 京都大学数理解析研究所

④ Junta Matsukidaira, Constructing two-dimensional integrable mappings that possess invariants of high degree, Symmetry Plus Integrability 2010, 2010 年 6 月 14 日, South Padre Travelodge, South Padre Island, TEXAS

⑤ Junta Matsukidaira, Constructing two-dimensional integrable mappings that possess invariants of high degree, 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, 2010 年 5 月 27 日, Dresden University of Technology, Dresden, Germany

[その他]

<http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~junta/paper.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA JUNTA)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：60231594