

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 3 月 31 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010 ～ 2012

課題番号：22560398

研究課題名（和文） 超高符号化率の誤り訂正符号の構成に関する研究

研究課題名（英文） A construction of very high rate error correcting codes

研究代表者

笹野 博（SASANO HIROSHI）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：00122052

研究成果の概要（和文）：大量の情報を伝送する際に不可欠な、高符号化率の誤り訂正符号として、性能の優れたパンクチャド畳込み符号を効率的に構成する問題について考察した。優れた畳込み符号は、多数の候補の中から計算機によって探索する必要がある。報告者が開発した高速の判定法を用い、膨大な量の候補の中から優良な多数の符号を決定した。また畳込み符号では利用されることが少ない双対符号を用い、性能の優れた高符号化率のパンクチャド畳込み符号が得られることを示した。

研究成果の概要（英文）：We have studied constructions of high rate punctured convolutional codes as an essential means for transmitting vast information with error correction. Convolutional codes with good performance can be found from large quantity of candidate codes by computer searches. Many good codes have been found from a large number of candidates by using a fast searching method presented by the author. We have shown that by using dual codes, which have seldom been employed for generating convolutional codes, many high rate good convolutional codes can be obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学、通信・ネットワーク工学

キーワード：符号化

1. 研究開始当初の背景

(1)情報量の急激な拡大にともない、大量の情報を蓄積、伝送する必要性がますます増大している。一方、情報の信頼性を確保するために誤り訂正符号の適用は不可欠であるが、このとき符号長に占める情報の割合である符号化率はできる限り大きい（1に近い）ことが望まれる。

(2)大容量化の一途である記憶媒体などでは、非常に高い符号化率（たとえば 0.98 以上）が要求される場合があるが、このような超高符号化率を達成する実用的な符号は現在でもその構成が非常に困難である。そのため、誤り訂正能力の優れた高符号化率の符号を比較的容易に構成する手法の開発が望まれている。

2. 研究の目的

(1) 近年 LDPC 符号などの高性能な誤り訂正符号が実用化されている。しかし非常に高い符号化率を要求されるような場合においては、実用的な符号を構成することは容易ではない。パンクチャド畳込み符号（以下では簡単のためパンクチャド符号と記す）は比較的低い符号化率 $R=1/n$ の畳込み符号（原符号）の出力系列を周期的にパンクチャ（削除）することにより、符号化率 $R=k/n$ の畳込み符号を導出する技術である。このとき削除するビットの数を適当に選ぶという単純な原理により、ほとんど制約なく高符号化率を実現できるという優れた特性を有している。

パンクチャド符号を構成するためには、①原符号を決定し、②これに対する最適なパンクチャの位置（消去パターン）を決定するという2段階の手順が必要である。したがって最良のパンクチャド符号を得るためには、すべての原符号の候補と、すべての消去パターンの組について重み分布を求める「全数探索」が必要となる。これは $R=1/n$ の最良の畳込み符号を決定するよりもはるかに困難な問題である。さらに候補となる原符号の総数は、畳込み符号の主要なパラメータである符号化率および拘束長の指数関数で与えられるため、比較的高符号化率で拘束長の大きい場合の全数探索に要する計算労力は膨大な量となる。一方で原符号を適当に決定し、最良の消去パターンを求めて良好な性能のパンクチャド符号を構成する方法（部分探索法）がある。この方法は全数探索に比べ、はるかに容易にパンクチャド符号が得られる利点がある。しかし原符号を決定する確定的手法は知られておらず、得られたパンクチャド符号が最良である保証はない。

本研究では、まず原符号と消去行列の組み合わせにおいて、可能な限り全数探索できる範囲では最良符号を探索し、計算時間の点で全数探索が困難な範囲については適当な部分探索法で、良好な性能を有する高符号化率のパンクチャド符号を探索することを目的とする。

(2) 前項の方法でパンクチャド符号を探索する場合、符号化率が高くなるほど原符号と消去行列との組み合わせの総数、特に消去行列の数の増加が探索を困難なものとする原因となる。この問題を解決する手段として、畳込み符号の双対符号を利用する方法が考えられる。

符号化率が $R=(n-1)/n$ の畳込み符号の双対符号は $R=1/n$ の畳込み符号である。また任意のパンクチャド符号に対して同一の重み分布をもつ高符号化率畳込み符号（これを等価符号とする）が存在することが知られている。これらのことから、 $R=1/n$ の畳込み符号の双

対符号を等価符号とするパンクチャド符号が存在すれば、 $R=1/n$ の畳込み符号から $R=(n-1)/n$ のパンクチャド符号を構成できることになる。

報告者は以上の原理に基づき、符号化率 $R=4/5$ について、既知の優良なパンクチャド符号の双対符号 ($R=1/5$) を求め、これらの双対符号（以下、双対元符号と呼ぶ）から $R=4/5$ のパンクチャド符号が構成できることを示した。本研究では双対符号を利用して、良好な性能を有する高符号化率のパンクチャド符号を効率よく探索することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 符号化率 $R=(n-1)/n$ の最良パンクチャド符号を全数探索によって探索する。原符号と消去行列のすべての組み合わせについて重み分布を計算し、最良の符号を決定する。ここで原符号の符号化率は $1/2$ および $1/3$ とする。全数探索では膨大な数の重み分布を計算する必要があり、従って高速な計算手法が不可欠である。本研究ではパンクチャド符号に対し、同一の重み分布を有する等価符号に変換することにより、計算の効率化を図る。また報告者が開発した、畳込み符号の重み分布を高速に計算する手法である双方向探索法による計算手法を採用し、計算の高速化を図る。等価符号を用いることにより、高速計算手法が容易に適用可能となる。また優良な畳込み符号を構成する際、カタストロフィックな符号を棄却する必要がある。この場合も、等価符号は一般的な高符号化率畳込み符号であるので、カタストロフィックであることの判定は容易となる。

(2) 全数探索における符号の候補数は、原符号の符号化率が $1/2$ の場合に比べ、 $1/3$ の場合に対し急速に増大し、探索が困難となる。そのため原符号の符号化率が $1/3$ の場合、探索が困難な範囲では部分探索により、優良な性能をもつパンクチャド符号を決定する。まず符号化率 $1/2$ の原符号に対する最良符号の中から、優良な符号を適当な個数選別する。これらの符号を構成する生成多項式を個々に取り出し、多項式の集合を作る。この集合から任意に3個の多項式を選択し、符号化率 $1/3$ の原符号を生成する。このようにして構成された原符号の集合に対して探索を行い、優良なパンクチャド符号を構成する。

(3) 双対符号を利用してパンクチャド符号を構成する場合、原符号に相当する $R=1/n$ の符号（双対元符号）をいかに選択するかが問題となる。本研究では、前項で述べた符号化率が $1/2$ の原符号に対する全数探索で得られた最良パンクチャド符号の双対符号を求め、これを双対元符号として用いる。部分探索によって良好な符号を求める際、得られた符号が

どの程度良好なのかを知ることは一般に困難である。しかし本手法ではある条件の最良符号を基準に探索を行っていることにより、ある程度の優良性が保障されているといえる。

符号化率 $R=1/n$ の双対元符号の生成行列 $G(x)$ に対し、以下の手順で双対符号を求める。

① $G(x)$ をスミス正準形 $A(x) \Gamma(x) B(x)$ で表現する。ここで $\Gamma(x)$ は不変因子行列を、また $A(x)$, $B(x)$ はそれぞれ $G(x)$ に対する行と列についての基本変形を表す行列を表す。

② $B(x)$ は $n \times n$ の正方行列であるが、これの逆行列 $B^{-1}(x)$ の左端の 1 列を削除した $n \times (n-1)$ の行列を転置することによって双対符号の生成行列 $H(x)$ が得られる。

③ $H(x)$ は一般に高次数の項を含むため、行に対する基本変形により、次数を低減し、最小符号を導出する。

④ パンクチャド符号の等価符号は、いくつかの制約の基に構成されている。前項で得られた最小符号に行に関する基本変形を加え、この制約を満たすパンクチャド符号を構成する。

(4) 前項の方法で得られるパンクチャド符号は、符号化率 $1/2$ の優良な符号から導出された双対符号を双対元符号とし、これらの双対符号として得られた符号であって、元のパンクチャド符号と同一、もしくは同等の性能を有することが推測される。ここで得られた $R=1/n$ の双対元符号を、(2) における原符号に相当すると考え、同様の方法で新たな双対元符号を生成する。すなわち得られた双対元符号を構成する生成多項式を個々に取り出し、多項式の集合を作る。この集合から任意に n 個の多項式を選択し、符号化率 $1/n$ の双対元符号を生成する。このようにして構成された双対元符号の集合に対して、これら双対符号についての探索を行い、優良なパンクチャド符号を構成する。

4. 研究成果

(1) 符号化率 $R=4/5$ のパンクチャド符号について、符号化率 $1/2$, $1/3$, $1/5$ の原符号と消去行列のあらゆる組み合わせを候補とする最良符号探索を行った。ここで原符号の拘束長は $m=7, 8, 9, 10$ とした。以下に得られた結果を示す。

表 1 の各項は最良符号の原符号の生成多項式と消去行列 (いずれも 8 進数表記) および重み分布 (自由距離と重み分布の第 1 項) を示している。 $m=10$ の場合、符号化率 $1/5$ の原符号については、計算時間の点で最良符号を得るのは困難であった。

表 1. $R=4/5$ の最良パンクチャド符号

原符号	$m=7$	$m=8$
1/2	207 331 [11 07] 6(213, 2091)	435 761 [17 01] 6(88, 623)
1/3	207 235 331 [01 04 13] 6(149, 1181)	417 727 731 [03 94 11] 6(39, 259)
1/5	217 233 247 257 361 [04 01 10 02 01] 6(134, 1015)	423 473 623 661 673 [01 04 02 01 10] 6(34, 180)
	$m=9$	$m=10$
1/2	1137 1605 [17 01] 6(13, 86)	2533 3755 [01 17] 6(2, 10)
1/3	1075 1563 1715 [11 05 02] 6(9, 45)	2535 3317 3633 [15 02 01] 7(66, 616)
1/5	1211 1373 1477 1621 1771 [04 01 10 02 02] 6(5, 19)	-

表 1 からいずれの拘束長についても、原符号の符号化率が低下するにともない、得られるパンクチャド符号の性能が向上することがわかる。最良パンクチャド符号に関する研究において、広範な範囲の拘束長について結果が示された例はなく、考察もほとんど行われてこなかった。本研究において、以上のことが明らかになった。

同様の探索を $R=(n-1)/n$, $n=6, \dots, 16$ のパンクチャド符号について行い、多数の新しい最良符号を得た。原符号の符号化率として $1/2$ と $1/3$ について、また拘束長は $m=7, 8, 9, 10$ について探索を行った。符号化率 $1/2$ の原符号に関しては、全領域で最良符号を決定できた。 $1/3$ の原符号については $1/2$ の原符号に比べ、はるかに多大の計算時間を要し、一部の範囲では最良符号の決定に至らなかった。このような広範囲の符号化率、拘束長について全数探索による最良パンクチャド符号が示された例はない。このことは、本研究で用いた計算手法が優れていることに起因すると思われる。

(2) 前項でも述べたとおり、符号化率 $1/3$ の原符号については、 $R>9/10$, $m>9$ の範囲で最良符号を探索するのが困難となってくる。この領域については、符号化率 $1/2$ の原符号から得られた最良符号の結果を利用して、 $1/3$ の原符号に対する優良な符号の部分探索を行った。その結果、 $R=9/10, \dots, 14/15$ のパンクチャド符号について、拘束長 $m=7, \dots, 10$ の

優良な符号を得た。これらの符号はいずれも符号化率 $1/2$ の原符号に対して全数探索によって得た最良符号よりも優れた符号であった。また一部の範囲で得られている符号化率 $1/3$ の原符号についての最良符号と比較してみると、符号化率 $R=12/13$ 程度に至るまで、さほど大きな性能の差がないことが明らかとなった。以上の結果をまとめると、本研究における探索手法によって、広範囲の符号化率、拘束長に対し、符号化率 $1/2$ の原符号から得られる最良符号と $1/3$ から得られる最良符号の中間に位置する性能のパンクチャド符号が得られ、さらにそれらは $1/3$ から得られる最良符号とさほど大きな差がないことが明らかとなった。符号化率 $1/2$ の原符号については、比較的大きな符号化率のパンクチャド符号についても全数探索が可能であり、本手法は高符号化率の優良なパンクチャド符号を構成するための有効な手段であるといえる。

(3) ブロック符号の場合、その重み分布を求める際に双対符号が有用な手法となることが知られている。しかし、畳込み符号の場合、元の符号と双対符号との間に 1 対 1 対応の関係が成立しないことから、双対符号を用いて優良な符号を探索する試みはなされてこなかった。さらに双対符号の双対符号が元の符号とどのような関係にあるかについても、詳しく研究されたことはない。本研究では、符号化率 $R=4/5$ 、拘束長 $m=8$ のパンクチャド符号について、符号化率 $1/2$ の原符号に対する全数探索で得られた、最良およびそれに次ぐ性能を有する符号の集合に対し、 $R=1/5$ の双対符号を求めた。これらの符号の双対符号と元のパンクチャド符号との関係を実験的に求めた。その結果、あるパンクチャド符号の双対符号のさらに双対符号は、複数個存在し、元の符号と一致する場合と一致しない場合のあることがわかった。また重み分布で比較した場合、元の符号と一致しない場合でも重み分布の各値に大きな差はなく、性能の似通った符号であることがわかった。さらに、原符号の符号化率で $1/5$ となる符号が得られることがわかった。これらの結果は畳込み符号を双対符号を通して考察する際の有効なヒントになるものと思われる。

(4) 符号化率 $R=(n-1)/n$ の畳込み符号の双対符号の符号化率は $R=1/n$ であり、(1), (2) における原符号に相応する符号であると考えられる。前項で得られた優良なパンクチャド符号から得られた双対符号の集合について、(2) におけると同様に、これらの符号を構成する生成多項式を個々に取り出し、多項式の集合を作る。この集合から任意に 5 個の多項式を選択し、符号化率 $1/5$ の原符号を生成する。これらの符号を双対元符号と呼び、これらの双対符号からパンクチャド符号を構成

し、優良な符号を探索した。(2) の場合、原符号の符号化率は $1/2$ もしくは $1/3$ を選ぶ必要があったが、ここではより低い符号化率が適用でき、さらに性能の優れた符号が得られる可能性が生じる。探索の結果、符号化率が $1/2$ の原符号から得られる最良符号に比べ、十分優れた性能をもつ符号が得られた。畳込み符号の双対符号に関しては、その性能評価について詳細な検討がなされてはいない。本研究における結果は、この問題における指針のひとつになるものと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① 笹野博, 守屋宣, 高符号化率パンクチャド畳込み符号の一構成法, 電子情報通信学会論文誌 A, 査読有, 採録決定, J96-A, no. 7, Jul. 2013.
- ② S. Moriya, H. Sasano, A construction of high rate punctured convolutional codes, Proc. of 2012 International Symposium on Information Theory and Its Applications, 査読有, Dec. 2012.
- ③ H. Sasano, Y. Ogami, An Improved Bidirectional Search for Obtaining Weight Spectrum of Convolutional, IEICE Trans. Fundamentals, 査読有, Vol. J93-A, no. 5, pp. 993-996, May 2010.

[学会発表] (計 3 件)

- ① 菊地加奈, 守屋宣, 笹野博, 双対符号を用いた高符号化率パンクチャド畳込み符号の構成に関する一考察, 第 35 回情報理論とその応用シンポジウム, 4. 1. 1, 2012 年 12 月 12 日, 別府湾ロイヤルホテル.
- ② 菊地加奈, 平下裕也, 三島知也, 大前ジェームズ, 笹野博, 双対符号を用いた高符号化率パンクチャド畳込み符号の構成, 電子情報通信学会技術研究報告, IT2012-20, pp. 67-71, 2012 年 7 月 20 日, 豊田工業大学.
- ③ 笹野博, 守屋宣, 高符号化率パンクチャド畳込み符号の一構成法, 第 34 回情報理論とその応用シンポジウム, 4. 1. 1, 2011 年 11 月 30 日, ホテル森の風鶯宿.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

笹野 博 (SASANO HIROSHI)
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号: 00122052