

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月17日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22650004

研究課題名（和文） グラフトポロジーク構造を考慮した高速ランダムウォークの設計と応用

研究課題名（英文） Design and Application of Fast Random Walks Using Graph Topological Structures

研究代表者

小野 廣隆 (ONO HIROTAKA)

九州大学・大学院経済学研究院・准教授

研究者番号：00346826

研究成果の概要（和文）：

有限グラフ上のランダムウォークとは、グラフ上の適当な頂点に置かれた粒子を隣接する頂点に対してランダムに移動させていくモデルである。本研究ではグラフ上のランダムウォークの高速化について主に以下を得た。(1) 多種多粒子系ランダムウォークにおける到達時間と全訪問時間の関係を導出した。(2) 結合系ランダムウォークの全粒子結合までの期待時間の見積りに成功した。

研究成果の概要（英文）：

A random walk on a finite graph is the model of repeatedly moving a particle on a vertex to one of its adjacent vertices. In this study, we obtain the following results: (1) we obtain inequalities about the relationship between hitting time and cover time of multiplex random walks, (2) for coalescing random walks, we obtain upper bounds on the expected coalescing time.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	900,000	0	900,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	2,800,000	570,000	3,370,000

研究分野：理論計算機科学

科研費の分科・細目：情報学基礎

キーワード：MHアルゴリズム、グラフトポロジーク、マルコフ連鎖、ランダムウォーク、全訪問時間、到達時間、有限グラフ、次数情報

1. 研究開始当初の背景

有限グラフ上のランダムウォークとは、グラフ上の適当な頂点に置かれた粒子を隣接する頂点に対してランダムに移動させていくモデルである。通常の「隣接頂点に等確率で移動する」というランダムウォークでは、全頂点に粒子が訪問するまでの期待ステッ

ブ数は一般に $O(n^3)$ であるが、グラフのトポロジークを考慮した遷移確率を採用することにより、期待ステップ数を悪くとも $O(n^2)$ 、トポロジークによっては $O(n)$ まで高速化できる。さて、自然界もしくは人工システム上の多くの現象が有限グラフ上のランダムウォークとしてモデル化できる。自然現象系に目を向けると、DNA コンピューティング/ナノテ

クにおける分子遷移機械は熱力学的な制約の下、とりうる状態空間をランダムウォークしながら形態を変化させる。人工現象系に目を向けると、情報システムであるインターネットのサーチエンジンのデータ取得用ロボットはWeb空間上をランダムウォークしながらデータを取得する。このように多くの分野で、高速なランダムウォーク設計が大きな意義を持つ。

2. 研究の目的

本研究では、ランダムウォークの高速化の仕組みを解明し、その設計論の確立を目指す。これにより、諸分野におけるランダムウォークとしてモデル化できる現象/対象に対する解決法の提供が可能となる。

3. 研究の方法

ランダムウォークの「高速化」のためには、まずランダムウォークの速度を高い精度で見積もることが必要となる。この観点から本研究では、従来の見積もり手法に加え、多種多粒子系におけるランダムウォーク、結合系のランダムウォークにおける代表的な速度の指標（到達時間、全訪問時間等）に関する見積もりに取り組んだ。

4. 研究成果

代表的な研究成果として、多種多粒子系におけるランダムウォーク、結合系のランダムウォークに関するものについて説明する。

4. 1 多種多粒子系ランダムウォークモデルに関する研究成果

多種多粒子系のランダムウォークモデルを、有限グラフ $G=(V, E)$ が与えられたとき、 k 個のトークンがグラフ G 上をランダムウォークするモデル、と考える。ただし、 k 個のトークンはそれぞれ異なる遷移確率をとるものとする。このような場合、同じグラフ上の頂点を遷移していくにもかかわらず、異なるトークンは全く異なる振る舞いをすることが予想され、それにより2節で述べた到達時間、全訪問時間といった速度に、単に同じ振る舞いをする粒子を複数遷移させるのとは全く異なった効果を持つのではないかと予想される。この予想を裏付けるのが以下の例である(図1)。

このグラフは c 点からなるクリークと各頂点が一つ置きにそのクリークの点と接続する $n - c$ 点からなるサイクルからなっている。

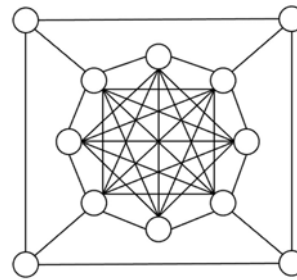


図1：多粒子ランダムウォークにより「速い」探索が可能となるグラフ

このグラフの上で、以下のような遷移確率をとるランダムウォークを考える：

$$p_{u,v} = \frac{\deg(v)^{-\beta}}{\sum_{w \in N(u)} \deg(w)^{-\beta}}$$

ただし、 β は実数値をとるパラメータであり、Ikeda, et. al 2009¹により、 $\beta=0.5$ としたときに到達時間の上限値が最小となることが示されている。より具体的には、単一粒子系のランダムウォークで任意のグラフでの到達時間が $O(n^2)$ となる（ただし、 n はグラフの頂点数）。また、 $\beta=0$ のとき、ランダムウォークは単純ランダムウォーク（トークンが遷移する隣接頂点を等確率で選ぶようなランダムウォーク）となる。図1のグラフ上で2つのトークンを遷移させるとき、以下の4つのシナリオを考える。1) とともに単純ランダムウォーク ($(\beta=0) \times 2$)、2) とともに $\beta=1$ ランダムウォーク ($(\beta=1) \times 2$)、3) とともに $\beta=0.5$ ランダムウォーク ($(\beta=0.5) \times 2$)、4) ひとつは $\beta=0.5$ ランダムウォーク、ひとつは $\beta=1$ ランダムウォーク。これらに対するシミュレーションの結果は表1のようなものとなった。

ここでの「全訪問時間」は、2つのトークンのうちいずれかが全頂点を訪問する時間、の意味で用いている。この結果は、ある種のグラフでは2つの「最適なランダムウォーク」を走らせるよりも、一つは遅いランダムウォークに変えた方が、全体としては高速なランダムウォークが実現できる例が数多く存在することを示唆している。

本サブテーマではこれらの結果を踏まえ、多種ランダムウォークの到達時間、全訪問時間を中心にその性質を調べる。通常のランダムウォークでは、Matthews のバウンド(またはMatthewの不等式)と呼ばれる到達時間と全訪問時間の関係を表した式が知られている。²

¹ Satoshi Ikeda, Izumi Kubo, Masafumi Yamashita: The hitting and cover times of random walks on finite graphs using local degree information. Theor. Comput. Sci. 410(1): 94-100 (2009)

² P. Matthews: Covering problems for Markov chain, The annals of probability, 16 (1988), 1215-1228.

表1: 図1のグラフ(1000頂点)に対する多種ランダムウォークの全訪問時間(1000回のシミュレーションの平均値) 下線はそのグラフでの最良値

遷移確率	$c = 500$	$c = 750$	$c = 900$
$(\beta = 0) \times 2$	377, 687	756, 096	907, 882
$(\beta = 1) \times 2$	145, 265	147, 190	75, 497
$(\beta = 0.5) \times 2$	<u>14, 309</u>	14, 647	12, 701
$(\beta = 0.5) \& (\beta = 1)$	16, 455	<u>11, 365</u>	<u>6, 924</u>

(Matthewのバウンド)

$$h_{n-1} \min_{u \neq v \in V} H_G^P(u, v) \leq C_G^P,$$

$$C_G^P \leq h_{n-1} \max_{u \neq v \in V} H_G^P(u, v)$$

ここで $H_G^P(u, v), C_G^P$ はそれぞれグラフ G 上で遷移確率 P で遷移する u から出発したトークンが v に到達するまでの期待ステップ数(到達時間), グラフ G 上で遷移確率 P で遷移するトークンが全ての頂点に到達するまでの期待ステップ数の初期配置に対する最大値(全訪問時間)である。

また h_n は n 番目の調和数をあらわし, およそ $\log n$ ほどである. 本研究ではMatthewのバウンドに類する関係式が多種ランダムウォークにおいても成立することを証明した. 得られた関係式は以下のようなものである:

$$h_{n-1} \min_{S \in V^k, v \in V} (H_G^{P^k}(S, v) - 1) \leq C_G^{P^k}$$

$$C_G^{P^k} \leq h_{n-1} \max_{S \in V^k, v \in V} (H_G^{P^k}(S, v))$$

ここで S は k 個のトークンの初期配置を, $H_G^{P^k}(S, v), C_G^{P^k}$ はそれぞれグラフ G 上で遷移確率 P^k で遷移する初期状態 S から出発した k 個のトークンが v に到達するまでの期待ステップ数(到達時間), グラフ G 上で遷移確率 P^k で遷移するトークンが全ての頂点に到達するまでの期待ステップ数の初期状態に対する最大値(全訪問時間)である。

この結果により, 多種ランダムウォークに

おいても(比較的扱いやすい)到達時間を解析することにより, 全訪問時間の情報がある程度得られることが明らかになった。

4. 2 結合系ランダムウォークモデルに関する研究成果

結合系のグラフ上のランダムウォークでは, 複数の粒子が離散時間で独立にグラフ上をランダムウォークする. 通常のランダムウォークとは異なり, 複数の粒子があるグラフ上の接点で出会ったとき(粒子が衝突するとき), それらは結合し, その後1つの粒子として再びランダムウォークする.

無向, 連結な n 頂点, m 辺からなるグラフ $G = (V, E)$ を考える. 初期状態において各頂点におかれた粒子すべてが結合するまでの期待時間を $C(n)$ とする. ここでは一般のグラフ G における $C(n)$ の上下界(バウンド)の見積もりを考える. 結果として, 一般的なバウンドとして,

$$C(n) = O(n / (\nu(1 - \lambda_2)))$$

ただし, $d(v)$ を頂点 v の次数, d を平均次数, λ_2 を遷移行列の第2固有値としたとき,

$$\nu = \sum_{v \in V} d^2(v) / (d^2 n)$$

と定めている. このパラメータ ν は, 各頂点の次数のばらつきを表したものであり,

$$1 \leq \nu = O(n)$$

であり, 正則グラフでは $\nu = 1$ となる. 本バウンドは最大次数が $O(m^{\epsilon})$ であるときに達成される(ϵ は任意の正数). この結果より, いくつかのことがわかる. たとえば, d -正則グラフに関しては,

$$C(n) = O(n / (1 - \lambda_2))$$

となる. また, $O(n / (\nu(1 - \lambda_2)))$ 自体は次数分布に偏りがあるようなグラフの場合, 劣線形となり, 全結合までの期待計算時間がきわめて小さくなることがわかる.

以上を代表的なグラフ構造に関してまとめたものが表2である.

これらの結果は, 単に結合系ランダムウォークにおける結果, というのみならず, 分散計算システムにおける相互排除問題に要する時間計算量に関する結果を示唆している. 結合系ランダムウォークでは, 各頂点に1つずつ粒子が置かれた初期状態からランダムウォークが始まるが, これは以下の「投票モデル」と等価であることが知られている: 投票モデルでは, 初期状態において各頂点がそれぞれ異なった「意見」を持っている. 各頂点は自分の意見を1ステップごとにランダムに選んだ隣接点の意見に変える. この投票モデ

ルは分散システムにおける、リーダー選挙などでも用いられるものである。E(C_v) を投票が終了するまでの期待時間（全頂点の意見が

表2: グラフ構造と主要なランダムウォークパラメータの関係

グラフ	頂点数	定常分布	混合時間
G	$n_G = n$	$\pi_v = d(v)/2m$	$O(\log n / (1 - \lambda_2))$
Q_k	$n_{Q_k} = n^k$	$\pi_v \leq (\Delta/2m)^k$	$O(kT_G)$
Γ_k	$n_{\Gamma_k} = n^k$	$\pi_v \leq \frac{(k^2(2m)^{k-2} n \Delta^2)}{(2m)^k}$	$O(T_G)$

一致するまでの時間) とする。つまり、上述の結果より、

$$E(C_v) = O(n / (v(1 - \lambda_2)))$$

となることがわかる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

1. R. Mizoguchi, H. Ono, S. Kijima, M. Yamashita: On space complexity of self-stabilizing leader election in mediated population protocol, Distributed Computing, 25, 451-460 (2012)
<http://dx.doi.org/10.1007/s00446-012-0173-9> (査読有)
2. C. Cooper, R. Elsasser, H. Ono, T. Radzik: Coalescing random walks and voting on graphs. Proceeding PODC '12 Proceedings of the 2012 ACM symposium on Principles of distributed computing, 47-56 (2012)
<http://doi.acm.org/10.1145/2332432.2233244> (査読有)
3. J. Hosoda, J. Hromkovic, T. Izumi, H. Ono, Monika Steinová, K. Wada: On the Approximability of Minimum Topic Connected Overlay and Its Special Instances. Theoretical Computer Science, 429, 144-154 (2012)
<http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2011.12.033> (査読有)
4. Y. Hosaka, Y. Yamauchi, S. Kijima, H. Ono, M. Yamashita: An Extension of Matthews' Bound to Multiplex Random Walks. 2012 IEEE 26th International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops & PhD Forum(2012)
<http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/IPDPSW.2012.107> (査読有)
5. Y. Nonaka, H. Ono, S. Kijima, K. Sadakane, M. Yamashita: "How Slow, or Fast, Are Standard Random Walks?-Analyses of Hitting and Cover Times on Tree" CATS 2011, Proceedings, CPRIT 119. 63-68 (2011)
<http://crpit.com/abstracts/CRPITV119Nonaka.html> (査読有)
6. Y. Otachi, T. Saitoh, K. Yamanaka, S. Kijima, Y. Okamoto, H. Ono, Y. Uno, K. Yamazaki: "Approximability of the Path-Distance-Width for AT-free Graphs", WG 2011: Lecture Notes in Computer Science, 6986. 271-282 (2011)
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25870-1_25 (査読有)
7. J. Hosoda, J. Hromkovic, T. Izumi, H. Ono, Monika Steinová, K. Wada: On the Approximability of Minimum Topic Connected Overlay and Its Special Instances. MFCS 2011: Lecture Notes in Computer Science, 6907. 376-387 (2011)
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-22993-0_35 (査読有)
8. H. Ono: Fast Random Walks on Finite Graphs and Graph Topological Information, Second International Conference on Networking and Computing, ICNC 2011, 360-363 (2011)
<http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/ICNC.2011.70> (査読無)
9. N. Fujinaga, H. Ono, S. Kijima, M. Yamashita: "Pattern Formation through Optimum Matching by Oblivious CORDA Robots" OPODIS 2010, Lecture Notes in Computer Science 6490. 1-15 (2010)
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17653-1_1 (査読有)

[学会発表] (計 8 件)

1. C. Cooper, R. Elsasser, H. Ono, T. Radzik: Coalescing random walks and voting on graphs Proceeding PODC '12 Proceedings of the 2012 ACM symposium on Principles of distributed computing, 47-56 (2012) 2012. 07. 16, ポルトガル
2. Y. Hosaka, Y. Yamauchi, S. Kijima, H. Ono, M. Yamashita: An Extension of Matthews' Bound to Multiplex Random Walks. 2012 IEEE 26th International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops & PhD Forum(2012) 2012. 05. 21, 中国
3. H. Ono: Fast Random Walks on Finite Graphs and Graph Topological Information, Second International Conference on Networking and Computing, ICNC 2011, 360-363 (2011), 2011. 12. 1. 日本
4. J. Hosoda, J. Hromkovic, T. Izumi, H. Ono, Monika Steinová, K. Wada: On the Approximability of Minimum Topic Connected Overlay and Its Special Instances. MFCS 2011: Lecture Notes in Computer Science, 6907. 376-387 (2011) 2011. 08. 25, ポーランド
5. Y. Otachi, T. Saitoh, K. Yamanaka, S. Kijima, Y. Okamoto, H. Ono, Y. Uno, K. Yamazaki: "Approximability of the Path-Distance-Width for AT-free Graphs", WG 2011: Lecture Notes in Computer Science, 6986. 271-282 (2011) 2011. 06. 22, チェコ
6. Y. Nonaka, H. Ono, S. Kijima, K. Sadakane, M. Yamashita: "How Slow, or Fast, Are Standard Random Walks?-Analyses of Hitting and Cover. Times on Tree" CATS 2011, Proceedings, CPRIT 119. 63-68 (2011), 2011. 01. 19, オーストラリア
7. N. Fujinaga, H. Ono, S. Kijima, M. Yamashita: "Pattern Formation through Optimum Matching by Oblivious CORDA Robots" OPODIS 2010, Lecture Notes in Computer Science 6490. 1-15 (2010), 2012. 12. 14, チュニジア
8. 野中良哲, 小野廣隆, 来嶋秀治, 山下雅史: "木上のランダムウォーク高速化の可能性" 2010年度 夏のLAシンポジウム.

2010. 07. 21. 九殿浜温泉 ひみのはな

[その他]

ホームページ等

<http://www.en.kyushu-u.ac.jp/hirotaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小野 廣隆 (ONO HIROTAKA)

九州大学・大学院経済学研究院・准教授

研究者番号: 00346826