

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月21日現在

機関番号：11201

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22650188

研究課題名（和文）音響による体験を取り入れた数学の新たな教育教材の開発

研究課題名（英文）Development of new effective educational materials of mathematics based on acoustic experience.

研究代表者

三浦 康秀 (MIURA YASUhide)

岩手大学・人文社会科学部・教授

研究者番号：20091647

研究成果の概要（和文）：本研究では、大学初年次における数学教育において、聴覚の体験を取り入れた効率的な教育教材の開発を行い、以下の項目を基礎に教育の場で詳しく検討を行い改良を行った。

- (1) 数学と音律論・和声学
- (2) 数学と音の物理
- (3) フーリエ展開と音色
- (4) 数学と音の文化

研究成果の概要（英文）：In this research, we developed the effective educational materials of mathematics using acoustic experience in the first year of a university, which we improved by examining the contents in detail from the field of the educational effects based on the following items:

- (1) mathematics and the principle of the temperament and harmony,
- (2) mathematics and physics of a sound,
- (3) the Fourier expansion and a tone,
- (4) mathematics and the culture of a sound.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	0	500,000
2011年度	300,000	90,000	390,000
年度			
年度			
年度			
総計	800,000	90,000	890,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学、科学教育

キーワード：数学の教養教育、音楽、音楽を取り入れる体験学習、音響、音律論、音の錯覚、フーリエ級数

1. 研究開始当初の背景

大学教育が大綱化されて久しいが、近年大学における教養教育の重要性が見直されてきている。

科学教育において、文系向け学生に対して

も論理的な思考力を身につけさせることが重視されるようになった。

2. 研究の目的

本研究では音や音楽を数学教育に取り入

れ、魅力ある教材を開発し、併せて教育方法の検討を行うことを目的とする

3. 研究の方法

まず、研究代表者の主たる専門である数学（関数解析学）以外の音や音楽、及び関連する諸分野の図書を購入し、基本的な理解を深める。

研究内容に極めて密接に関連する認知心理学、及び情報科学、さらには錯視を専門とする実解析学の研究者との直接の交流を図り、本研究に関する新しい知見を得る。

題材の授業に必要な器材を購入し、授業実践を踏まえて、数学教育としての教育効果を検証する。

随時、数学教育学会のシンポジウムや学会で成果発表を行ないつつ、他の数学教育の専門家との直接交流の中で、コメントや助言を得る。

最後に魅力ある教育教材を作成する。

4. 研究成果

本科学研究費の補助により、音響体験を取り入れた教材の開発を行うことができ、図書として出版を予定しており、現在執筆途中である。最近、音の科学に関する啓蒙書的なものは多少出版されてきたが、数学教育に音響を多方面から取り入れた図書は国内外でもほとんどないものと思われる。対象学年は、中学高校から大学初年次までに渡り、理系ばかりではなく文系学生にも活用できるように工夫を施しており、近年の理系離れにも資するものと考えている。また、数学教育学会での発表をはじめ、本学以外での大学での講義や一般向けの公開講座でも本教材を活用し、一定の評価を得ている。

研究代表者は、岩手大学における数学の教養教育のひとつとして、平成 13 年度より、音楽を取り入れた講義を行ってきている。本講義は、全学 1、2 年次対象の選択科目であるこの授業実践を踏まえて、以下の教育教材を開発した。

(1) 授業実践を踏まえた教材

①音律論・和声と数理

・協和の原理と最小公倍数：実際に音を聴く体験を通して、2つの音が単純な整数比で協和するという原理を物理的な説明を与え、最小公倍数との関係を考える。

2つの音が協和するのは、弦の長さ（従って振動数）が簡単な整数比になることは、ピタゴラスにより知られている。例えば、ドとソ（完全5度）は振動数比が2:3でありよく協和する。これはドの第3倍音（1オクターブ上のソ）と、ソの第2倍音（1オクターブ上のソ）を共有しているためである。このことをピアノを用いて、実験的に音で体験でき

る。ピアノは鍵盤が下がっているときのみ、そのキーに対応する弦だけが振動できる状態になり、それ以外の弦は振動しない。まず、ドの鍵盤を静かに下ろしておいた状態で、ソの鍵盤を強めに叩いてすぐに離すと、はじめに叩いておいたドの鍵盤から高い音が鳴り出す。この音の高さを後から調べれば、本来のドの音ではなく、1オクターブ高いソと同じ高さの音であることがわかる。（注意：ピアノは平均律に調律されていて完全な協和は得られないが、この程度の実験では支障ない。）

・ピタゴラス音階とユークリッド互除法：古代において、いかにして量を数量化したかという問題を取り上げ、最小公倍数を求めるアルゴリズムを考える。

・音程の認識と対数関数：心理物理学におけるフェヒナーの法則と対数の考えとの関係を、音を聴くことにより理解する。そのために、半音をもとに振動数比率が一定である通常のギターと、フレットを綿棒を使って振動数の差が一定になるように作った音階を聴き比べてもらう。後者の音列では、音程に大変違和感を体験できる。

・平均律音階とさまざまな平均：相乗平均や調和平均などの平均の考えを、逆変換の考えを用いた解釈を与える。

・ケプラーの宇宙の調和と楕円の関数：惑星の楕円軌道の中からピタゴラスの調和との関係を見出したケプラーの研究をもとに、楕円の幾何学的性質を考える。

②音の物理と数理

・音の関数表示：音の疎密現象をグラフ化する方法を考える。ただし、ここでは正弦波についてとする。

・波動現象と2変数関数：時間と位置を変数とする2変数関数によって音の伝播を表し、実際に音を聴く体験を通してうなり現象や定常波のおこる原理を数学的に証明する。複音ハーモニカでは、同じ音の配列が2列になっているが、各2音はわずかに振動数が異なっているのでうなりの体験は容易にできる。さらに、振動数の差がうなりの回数に等しくなることを厳密とはいかないまでも体験するには、ピアノやキーボードの低い音域における隣り合う白鍵と黒鍵を同時に鳴らす方法がよい。半音の振動数比1.059...から、例えば中央のラ(440 Hz)の2オクターブ下のラ(110 Hz)とその半音高いキーでは、約6回のうなりが聴こえる。

・三和音の明るさと振動数比：実際にピアノやキーボードによる長三和音、短三和音、増三和音、減三和音（基本形や展開形）を教室で聴いてもらい、その印象について回答してもらおう。項目によっては個人差もかなり出るが、概ね振動数比が複雑になるほど、和音の印象は暗くなる。ただし、同種類の展開形では、かならずしも比率の複雑さと暗さが関係するとは言えず、音高がそれより優位に働く場合があることもおこる。

・三和音の関数表示：正弦波による主要三和音をグラフによって可視化する。これにより、和音の明るさと、グラフの振動の様子とを観察して関係を見出す。

③音色とフーリエ級数展開

・特徴的な楽器音の波形のフーリエ級数展開：バイオリン、フルート、クラリネット、オーボエの楽器音の特徴的な波形を取り上げる。これらの関数のフーリエ展開を求め、スペクトルを決定する。さらに、これらの波形と疎密の様子との対応を考える。ただし、ここで取り上げた楽器はいずれも持続音を奏でられるものであり、ピアノのような瞬間的に強い音を発するものは、ほとんどの時間を占有する余韻の音色では特徴づけられないことにも触れる。このことは簡単な実験で確かめられる。レコーダーを用意し、ピアノのキーをひとつ叩き、ほんのちょっと遅らせて録音を2,3秒間する。これをいくつかの他のキーでも続けて録音し、連続した再生音を聴いてもらう。まるで弦楽器かオルガンのような音がする。ピアノ音の録音を時間反転したものを聴いてもよい。これより、音色は波形のみでは音色が決まるのではなく、音の立ち上がりにも関係することがわかる。

・スペクトルの特徴と楽器の演奏表現：倍音構造が多い楽器ほど、演奏による音色の制御が可能になることを考える。

・2つのタイプのスペクトルの合成：音高と振幅のバランスによって、異なったタイプのスペクトルを合成すると興味ある結果が現れる。

・音の高さの認識に関する錯覚の数理：基本音がぬけた複合音は、基本音の高さに聴こえるというミッシングファンダメンタルの原理をグラフの観察と級数の形から考える。発信チューナーを用いて、実際に聞いてもらい、アンケートの回答からどれくらいの人が気付くかを調べた。「そう聴こえる」、「言われればそう聴こえる」は7割であった。他は、「そう聴こえない」、「わからない」はほぼ同数であった。

④音の文化と数理

・音階の歴史と作曲様式：その時代に用いられた音律と作曲様式との関係、また、その後の変遷を考える。

・世界の伝統音楽と数理：民族音楽において微分音程が現れる例や特徴的なスペクトルが現れる例を考える。

・中国の音律論と音環境：三分損益法と陰陽五行説に関連するものを紹介した。

（2）数学教育としての意義と問題点の考察～学生のレスポンスカードを中心に～

①本講義に対する学生の授業アンケートでは、「高校までの数学は興味がなかったが関心をもてた」、「数学は苦手だけど音楽に助けられて新しい発見をすることができ楽しかった」、「さまざまな音楽を数学的に解析すると過去の人たちがとてもよく考えていたのだと思った」と評価する一方、「音楽の知識がないと実感がしづらい」や「うなりがよく聴こえなかった」と音や音楽になじめない人もいることは事実である。後者の対応としては、学生がなじめるような選曲や、聴きやすい音源にする更なる工夫が必要と思われる。

②うなりに関する授業では、「うなりが加法定理で証明できることに驚いた」という意見がある反面、文系学生では加法定理そのものがなじめなく理解が困難であるという意見もあった。理系学生でも、2変数の波動関数の表示の理解には十分時間が必要であると思われる。うなりなどは高校の物理では学習するが、きちんとした証明は扱っていないようである。また、うなりの実験は毎秒数回程程度のものが聴き取りやすいようである。音による定常波の実験はマイクを使用して行ったがかなり神経を集中させないとむずかしくプールなどの水面の波形を連想してもらうことにした。和音のところでは、「和音の美しさを関数で表現することがおもしろかった」、「三角関数は苦手だったが音のグラフではわかりやすかった」、「ピアノの共鳴の実験は今まで知らなかったので家で確かめてみたい」など、和音のグラフによる視覚化は新鮮だったようである。音の高さの認識は主観基音とよばれることもある。通常、持続的な楽器音はフーリエ展開で示されるように、また聴覚神経の情報処理の研究からも知られているように、基本音の整数倍音の違いで音色を感じ、高さは基本音の振動数で認識される。複合音3:5:7の音が3の音ではなく、1の音に聴こえる理由として、最大公約数である1の音を想定して聴いているからかも知れないし、さらにはグラフで見るることによってより納得もいく。いずれにしても視覚や聴

覚の錯覚の数理としても興味ある問題と思われる。視覚と聴覚の情報処理のメカニズムでは、共通する部分も多いので、近年、研究が盛んになって来ている視覚の錯覚の数理の研究を今後も進めながら、これを聴覚に応用して新たな教材の開発を計画したい。

③音色に関するところでは、「波形によって音色が違うことに感心した」、「のこぎり波がサインカーブで近似できることにおどろいた」、「数式はわからなかったがグラフは理解できた」、「弦楽器のほうが管楽器よりも波形が複雑であることがわかった」、「波形で複雑なものをスペクトルとするとよくわかった」、などまとめや感想の他、「ほとんどの楽器の音はサインカーブではないのですか」、「バイオリンの波形は、左右対称できれいな波形と思っていた」など自分のイメージしていたものと異なっていたという記載も多かった。また、「管楽器など他の楽器の波形も見たい」、「バイオリンからのこぎりの波形になるかという説明ができるか」、「他でフーリエ解析の授業を聴いているが音に出てきたのはおどろきだった。フーリエについてもう少し知りたいと思った」など新たな問題意識についての記載もあった。また、「ピアノの音の頭をカットする実験がおもしろかった」、「音色がスペクトルのみで決まるのではないことがわかった」、「バイオリン音の柔らかいや堅い理由がわかった」、などがあり、グラフを正しく読み取り、現象を数学の言葉で説明する能力を養う教材として活用できたのではないかと思う。音の現象を数理的に説明することには興味を持ってくれるようである。オーディオ媒体による体験は単に聴き流すという受動的な行為ではなく、音から受ける能動性の伴う印象を引き出すことができるので、積極的な学生参加型の授業にある程度なっと思える。なお、三角関数やフーリエ級数展開の指導では、学習への動機づけの観点からパソコン・ソフトを応用し、グラフのアニメーションを活用した数学教育の興味ある実践例が報告されているので、今後参考にしたい。

④数学と音楽との関係について、比較音楽学の研究者ザックスの著書「音楽の起源」の序文の中で、「音楽が何千年もの間、一方では音が数学的な比率によって支配される振動の問題であるという事実と、他方では音楽作品が無形の、まさに不合理なものであるという事実の間に、いかにしてバランスを保ち続けて来たかということは、まったく興味の深い話である。」と音楽の歴史の中での数学の位置づけが小さくないことを述べてあり、数学は音楽文化の理解にも資するのではないかと考える。受験勉強で慣らされた大学生

が、聴くという身近で単純な体験を通して数学の幅広さと深さを見出すことができるとすれば、そのことは教養科目としての数学の存在意義に多様性を与えるものと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計1件)

①三浦康秀、音楽を活用した大学における数学の教養教育について(3)、2010年度数学教育学会秋季例会論文集、査読無、2010、59-61

〔学会発表〕(計2件)

①三浦康秀、順序ヒルベルト空間上の半群について、作用素論・作用素環論セミナー、2011.7.11、東北大学大学院情報科学研究科(宮城県)

②三浦康秀、音楽を活用した大学における数学の教養教育について(3)、数学教育学会、2010.9.23、名古屋大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三浦 康秀 (MIURA YASUhide)

岩手大学・人文社会科学部・教授

研究者番号：20091647