

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 2日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2011

課題番号：22654001

研究課題名（和文） p-進佐藤理論と数論幾何

研究課題名（英文） p-adic Sato theory and arithmetic geometry

研究代表者

山崎 隆雄 (YAMAZAKI TAKAO)

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：00312794

研究成果の概要（和文）：

佐藤幹夫は KdV 方程式や KP 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式の可積分構造を解明するためにタウ関数を導入した。その p-進類似は Anderson により導入され、次のような数論幾何の問題へと応用された：ヤコビ多様体のテータ因子の上に位数が素数の点が存在するためには、その素数には厳しい制限がつく。本研究では、この結果を「素数」から「素数の冪」へと大幅に一般化することに成功した。また、このような具体的な結果を得る過程で得られた p-進佐藤理論の基本定理たちは、今後の他の研究にも有用であろうと期待される。

研究成果の概要（英文）：

In order to clarify the integrable structure of non-linear PDEs such as KdV and KP equations, Mikio Sato introduced the tau function. Anderson introduced its p-adic analogue and applied it to arithmetic problem: a torsion point of "prime order" on the theta divisor of a Jacobian variety seldom exists. We extended this result to "prime power order". In the course of proving this result, we established many fundamental results on p-adic Sato theory, which are expected to be useful for other future research as well.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,500,000	0	1,500,000
2011年度	1,300,000	390,000	1,690,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,800,000	390,000	3,190,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学・数理物理学・タウ関数・佐藤理論・ヤコビ多様体

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の中心的な目的は、佐藤理論という数理物理に出自を持つ理論を数論幾何というまったく異なるフィールドへ応用することである。

佐藤理論は Korteweg-de Vries (KdV) 方程式や Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方

程式という、数理物理に起源を持つ非線形偏微分方程式の理論であるが、不思議なことに代数曲線のテータ関数・テータ因子と密接な関係があり、これらの方程式は代数曲線のテータ関数を用いて明示的に表示される解を持つ。(そればかりか、逆に主偏極アーベル多様体に対してテータ関数が KP 方程式の

解を与えることと、それが代数曲線のヤコビ多様体であることは同値であるという事実 (Novikov 予想、塩田隆比呂氏の定理) まである。

佐藤理論では代数曲線のヤコビ多様体を佐藤グラスマン多様体で、テータ関数をタウ関数で、それぞれ記述することにより、この理由を深いところから明快に解き明かしている。(上記した塩田隆比呂氏による Novikov 予想の証明においても、この佐藤理論は重要な役割を果たした。) さらに、タウ関数は Schur 関数による展開を用いて詳しい性質を解析することができる。この「佐藤展開定理」はたいへん強力で、さまざまな応用をもつ。Segal-Wilson は、この方法を用いてテータ関数の消滅位数を決定した。

G. Anderson は、1994 年に発表した論文で佐藤グラスマン多様体とタウ関数の  $p$ -進理論を展開し、Segal-Wilson の結果の  $p$ -進類似を証明した。さらに、その理論を Manin-Mumford 予想に関係する数論幾何の問題へ応用した。この Anderson の結果はたいへん画期的なものであり、今日に至るまでそれ以上の結果はほとんどみられなかった。

## 2. 研究の目的

Anderson は、上で述べた Manin-Mumford 予想への応用に必要な最低限度しか  $p$ -進理論を展開していなかった。そこで、我々は  $p$ -進佐藤理論の基礎付けを行いたい。具体的には、ヤコビ多様体の還元・Neron モデルや形式群がグラスマン多様体ではいかに記述されるか、 $p$ -進テータ関数とタウ関数の関係など、基本的な研究対象の取り扱い方法を確立したい。その上で、可能であれば Anderson が行ったような数論幾何への応用にも挑戦したい。

## 3. 研究の方法

本研究における一つの基本的な方針は、数理論と数論幾何の研究者間交流を促すことである。これに関して、次の三件の活動を行った：

- ① 2010年9月28日から四日間、研究分担者の小林真一准教授 (東北大学) と共同で、東北大学にて勉強会「 $p$ -進佐藤理論と数論幾何」を開催した。国内だけの勉強会ではあるが、40名ほどの参加者を得ることができた。数理論と数論幾何の両分野から七人の研究者に講演をお願いし、それぞれ時間をたっぷり使って解説していただいた。参加者も、数理論の研究者と数論幾何の研究者がほぼ

半々となり、両分野の間で大いに交流がなされた。私自身もこの勉強会で学んだことは大きく、それらは下記の研究成果に結びついた。

- ② 2011年2月11日～25日に Poitiers 大学の Pol Vanhaecke 教授を東北大学に招聘した。(Vanhaecke 教授は Birkenhake 氏と共同で、上記した Segal-Wilson の定理に別証明を与えたことがある。また、連携研究者の井上玲氏 (鈴鹿医療科学大学・助教 (当時)) および私の共同研究者でもある。) Vanhaecke 氏の滞在中である2011年2月16日から二日間、井上玲氏と共同で、鈴鹿医療科学大学にて国際研究集会「Integrable systems in Suzuka」を開催した。ここでは、数理論・数論幾何の両分野から七名の研究者に講演をしていただいた。国内外から20名ほどの研究者が参加した。

- ③ 2011年12月27日～2012年1月27日の間、Jussieu 数学研究所の Bruno Kahn 教授を東北大学に招聘した。その滞在中である2011年1月23日から三日間、都築暢夫教授 (東北大学) と共同で、国際研究集会「Workshop on  $p$ -adic arithmetic geometry and motives」を開催した。ここでは、主に数論幾何の研究者に12の講演をしていただいた。国内外から30名ほどの参加者があった。

大きな研究集会としては以上の三件を企画・運営したが、そのほかにも東北大学において定期的に学外から研究者を招いてセミナーを行った。また、国内外で開催された多数の研究集会にも積極的に参加した。それにより、多くの研究者との交流することができた。また、研究成果の発表も数多く行うことができた。

## 4. 研究成果

本研究で得られた成果を述べる前に、Anderson の結果を具体的に述べておく。代数曲線のヤコビ多様体のテータ因子の上にある捻れ元は、たいていの場合有限個しかないことが Raynaud の定理により分かる。しかしながら、その個数の上限は (種数が2の場合を除き) 一つの例に対してすら知られていない。Anderson の結果では、フェルマー曲線の商の場合に、位数が通常 (ordinary) の素数  $p$  である点がテータ因子の上になことを証明した。

本研究では、この Anderson の結果の類似

および拡張として、次の二つの結果を得ることができた。

- ① 宮坂有憲氏（東北大学）との共同研究では、Anderson が扱ったものと異なる、ある特別な超楕円曲線（方程式  $y^2 = x^{2g+1} + x$  で定義される曲線）に対して、Anderson の類似の結果（位数が素数の点がテータ因子の外にあること）を証明した。（論文は投稿中。）
- ② 小林真一氏（東北大学）との共同研究では、Anderson の結果において位数が素数  $p$  に限定されていたところを、素数  $p$  の冪  $p^n$  へと一般化することに成功した。ここで  $n$  は任意の自然数に取ることができるので、この結果は Anderson の結果の大幅な一般化となっている。さらに、フェルマー曲線の商に限らない、一般の代数曲線に対しても同様の理論がある程度まで展開できることを発見した。（論文は準備中。）

証明では Anderson の理論、特に  $p$ -進佐藤グラスマン多様体や、 $p$ -進タウ関数を本質的に利用する。①においては、Anderson が展開した理論をほぼそのまま利用して、それを別種の曲線に適用するだけで上記の結果が証明できた。

しかし、②においては事情が異なる。これは Anderson の理論だけでは証明することができないため、その前段階として、 $p$ -進佐藤理論の基礎付けも行う必要があった。特に重要な点としては、Artin-Hasse 指数関数を利用することによって  $p$ -進ループ群の元を大量に構成したことが挙げられる。また、そのほかにも、これまでに見えていなかった様々な対象（Weierstrass ギャップ列、還元曲線の Hasse-Witt 不変量・特に ordinary となる条件、形式群の対数関数など）が  $p$ -進佐藤理論において果たす重要性が明らかとなり、それらを理論に組み入れることが可能となった。これらの基礎的な結果は数論幾何の他の方面にも応用ができる可能性を秘めている。

今回の研究では、「研究の目的」の欄に記した問題のうち、ヤコビ多様体の還元・Neron モデルや形式群とグラスマン多様体との関係については、（当面必要となる程度までは）理解が進んだと考えている。これらの結果は  $p$ -進佐藤理論の基礎として、今後の他の研究においても重要な役割を果たしうると期待できる。

しかしながら、 $p$ -進テータ関数と  $p$ -進タウ関数の関係については満足な理解を得ることはできなかった。ただし、複素解析的な

設定において、この問題のもっとも困難な点は「ループ群とヤコビ多様体の不変被覆を結びつけること」にあったのであるが、その類似とみなせる「 $p$ -進ループ群と形式群を結びつけること」には成功した。ただし、これが正しい「結びつけ方」であるかどうか、すなわち  $p$ -進テータ関数と  $p$ -進タウ関数の関係がこの方法で関係づけられるかどうかは未解決である。この点は今後も研究を進めていきたいと考えている。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計3件）

① Tropical spectral curves, Fay's trisecant identity, and generalized ultradiscrete Toda lattice. (Rei Inoue and Shinsuke Iwao) in "Proceedings of the Infinite Analysis 09: New Trends in Quantum Integrable Systems", eds. B. Feigin, et al., pp. 101 - 116 (World Scientific, 2011). 査読有り

② Double Schubert polynomials for the classical groups (T. Ikeda, L. Mihalea and H. Naruse) Adv. Math. 226 (2011) 840-886. 査読有り

③ Singular fiber of the Mumford system and rational solutions to the KdV hierarchy. (Pol Vanhaecke, Rei Inoue and Takao Yamazaki) Communications on Pure and Applied Mathematics, 63, 508-532 (2010) 査読有り

〔学会発表〕（計13件）

① Takao Yamazaki, On Theta divisor, Jacobian, KdV and KP equations. 2012年3月14日、TIMS Seminar on Arithmetic Geometry, National Taiwan University, Taiwan.

② Shinichi Kobayashi, Torsion points on the quotient of a Fermat Jacobian via Anderson's  $p$ -adic soliton theory, II. 2012年3月7日、Mini-workshop on number theory, National Tsing Hua University, Taiwan.

③ Takao Yamazaki, Torsion points on the

quotient of a Fermat Jacobian via Anderson's  $p$ -adic soliton theory, I. 2012年3月7日、Mini-workshop on number theory, National Tsing Hua University, Taiwan.

④ Takao Yamazaki,  $p$ -adic Sato theory and arithmetic geometry. 2012年2月18日、香川セミナー、香川大学.

⑤ Takeshi Ikeda,  $K$ -theoretic Schubert calculus for Lagrangian Grassmannian. 2011年11月10日、都の西北代数幾何学シンポジウム、早稲田大学.

⑥ Rei Inoue, Tropical curves, tropical theta functions and integrable systems. 2011年10月6日、SIAM conference on "Applied algebraic geometry", North Carolina State University, USA.

⑦ Takao Yamazaki, Torsion on theta divisors of hyperelliptic Jacobians and  $p$ -adic tau functions. 2011年9月22日、Geometrie arithmetique et motivique, Luminy, France.

⑧ Rei Inoue, Introduction to tropical Jacobians and theta functions. 2011年1月4日、Integrable systems in Suzuka, Suzuka University of medical science.

⑨ Takeshi Ikeda, Quantum Schubert vs affine Schubert via nilpotent Toda lattice. 2010年10月19日、RIMS 研究集会「表現論と組み合わせ論」、京都大学数理解析研究所.

⑩ Shinichi Kobayashi, Mazur-Tate の  $p$ -進テータ関数とその周辺. 2010年9月30日、 $p$ -進佐藤理論と数論幾何、東北大学.

⑪ Takao Yamazaki, Krichever correspondence /  $p$ -adic tau function and its application to arithmetic geometry. 2010年9月30日、 $p$ -進佐藤理論と数論幾何、東北大学.

⑫ Takeshi Ikeda, Boson-Fermion correspondence and KP-hierarchy. 2010年9月29日、 $p$ -進佐藤理論と数論幾何、東北大学.

⑬ Takeshi Ikeda, Review on Koszul duality. 2010年6月4日、第13回代数群と量子群の表現論研究集会、すいとびあ江南.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山崎 隆雄 (YAMAZAKI TAKAO)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：00312794

### (2) 研究分担者

小林 真一 (KOBAYASHI SHINICHI)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：80362226

### (3) 連携研究者

池田 岳 (IKEDA TAKESHI)  
岡山理科大学・理学部・准教授  
研究者番号：40309539

山崎 玲(井上 玲) (INOUE YAMAZAKI REI)  
千葉大学・理学部・准教授  
研究者番号：30431901

近藤 智 (KONDO SATOSHI)  
東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任助教  
研究者番号：30372577