様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　７日現在

機関番号：１２６０５
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：２０１０～２０１２
課題番号：２２６５４００３

研究課題名（和文）　代数体の定義方程式の特異点解消とゼータ関数との関係の研究

研究課題名（英文）　Resolution of singularities of defining equations of number field and its relation to zeta function

研究代表者
前田　博信（Ｍａｅｄａ　Ｈｉｒｏｎｏｂｕ）
東京農工大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号：５０１７３７１１

研究成果の概要（和文）：代数体を定義する定義方程式は一意的ではなく，いくらでも多くの特異点や無限に近い特異点を持つが，特異点のもつ情報から代数体の性質の一部，例えば素イデアルの分解の様子が読み取れることが分かる．しかしながら実２次体と虚２次体の相違を反映するような特異点の性質は発見できなかった．一方，比較的簡単な計算で，底式の特異点集合が，ヒルベルトが数論報告で単位元形式と呼んだ同次式の零点集合に含まれることが証明できた．

研究成果の概要（英文）：The defining equation of a number field is not unique and has in general many singular and infinitely near singular points. One can read some number theoretic properties, e.g. prime ideal decomposition, from these singularities, but we cannot find any properties of singutlarities, which distinguishes real and imaginary extensions. On the other hand I was able to prove the singular locus of the fundamental equation of a number field is contained in the zero points of a homogeneous form, which Hilbert called the Einheitsform in his Zahlbericht.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	５００，０００	０	５００，０００
２０１１年度	３００，０００	９０，０００	３９０，０００
２０１２年度	３００，０００	９０，０００	３９０，０００
年度			
年度			
総　計	１，１００，０００	１８０，０００	１，２８０，０００

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数体，特異点，底式，定義方程式

１．研究開始当初の背景

（１）代数体の定義方程式は従来は補助的なものと考えられ,この特異点を直接計算した例はあまりなかったが，本研究代表者が２００５年に発表した論文により，代数体における素イデアル分解の計算に特異点解消の方法が有効であることが分かっていた．

（２）デデキントが純３次体のゼータ関数を研究した論文で，表現は異なるものの，３次式の特異点を正確に調べてオイラー因子を決定していることから，定義式の特異点とゼータ関数に関係がある可能性があった．

２．研究の目的

（１）代数体の代数拡大を定義する方程式の

無限に近い特異点のなす列と代数体の数論的性質との関係を研究する．例えばＬ関数のオイラー積における特異点の寄与を正確に与え，関数等式や類数公式への影響を調べる．あるいは，基礎体が実２次体と虚２次体とで特異点にどのような差があるかを研究する．
（２）上記の結果を定義式の係数が一般の代数的数の場合に拡張する．

３．研究の方法

具体的に多項式の特異点を係数環上の多項式イデアルとして求め，一意化元を求めて多項式に２次変換を施すという方法で特異点解消を計算した．その補助として下記のような文献の購入とコンピュータの活用と研究集会への参加を行った．

（１）本補助金で購入した文献は，代数幾何学と特異点解消に関連するものが，
J. Kollar 著，Resolution of singularities,
D. Mumford 著，Selected Papers,
Kiyek 他著，Resolution of curve and surface singularities,
S. Abhyankar 著，Weighted expansions for canonical desingularization,
E. Sernesi 著 Theory of moduli,
E. Sernesi 著，Deformations of algebraic schemes,
R.Hartshorne 著，Deformation theory,
D. Christopher 他編集，Higher dimensional algebraic geometry,
G. Shimura 著，Abelian varieties with complex multiplication and modular forms,
C. Faber 他著，Classification of algebraic varieties,
等である．
また，代数的整数論に関連した主なものが
G. Eisenstein 著,Mathematische Werke,
G. Shimura 著，Collected Papers I, II, III, IV,
G. Shimura 著，Introduction to quadratic forms,
等である．

（２）最初に特異点の場所を特定するのであるが，特異点の剰余体の標数は定義方程式の判別式の多重因子であるから判別式の計算が不可欠である．その計算量が多いがコンピュータソフト Mathematica を用いることにより比較的大きな係数のものも扱えた．ただし，当初の計画にあった係数が有理整数でない一般の場合についてはほとんど計算が進まなかった．研究の後半では２次形式の簡約化の射影幾何学的な計算も行った．これらの計算と計算結果の整理のためのコンピュータを本補助金で購入した．

（３）本研究に関連する特異点解消や代数的整数論や代数学関係の下記の研究集会に本補助金の旅費を用いて参加した．
平成２２年８月「代数幾何の関連する諸分野」，北海道大学
平成２３年６月「極小モデルと端射線」京都大学数理解析研究所，
平成２３年８月「代数学シンポジウム」岡山大学，
平成２３年９月「日仏特異点シンポジウム」九州大学，
平成２３年１１月「代数的整数論とその周辺」京都大学数理解析研究所，
平成２４年１２月「代数的整数論とその周辺」，
平成２５年２月「代数・解析・幾何セミナー」鹿児島大学．

４．研究成果

（１）当初は有理数体上の定義方程式には無限に近い特異点がないと予想していたが，これに反して，ひとつの代数体を定義する方程式の中にはいくらでも多くの無限に近い特異点をもつものがあることがわかった．それは２次変換と逆に変数に素数ｐの冪をかけることによりｐ上の特異点を増やすようにできるからである．これらはある意味で非本質的な特異点である．数論的な特異点で特徴的な，定義式の次数の素因子になっている素数上の特異点についてはその個数に上限がある可能性があるが，証明できてはいない．

（２）２次体のように定義式として常に非特異なものを選ぶことができる代数体があるが，次数が高くなると単独で非特異な定義式をもつ代数拡大はかなり特殊なものに限られると思われる．しかしこれも証明はできていない．多くの例が示すことは，１変数で定義することが特異点は避けられない理由と思われる．しかしそれが代数体の類数のような不変量と関係するのかどうかを示す例が十分計算できていない．

（３）上記の問題に関連して，１９世紀後半に整数環の局所化を用いて代数的整数論の基礎を築いたゾロタレフの結果と，２０世紀前半のバウアーによる多項式のピュイズー数の研究が参考になった．ピュイズー数は多項式のニュートン多角形の傾斜から計算でき特異点の特性対とも関係する量である．これらの古典的な結果は数論と特異点論との関係を示唆するものである．特異点の重複度とその点の下にある素数とが互いに素であれば，変数にチルンハウス変換を施して単項変換を行うと最大接触度を確実に下げることができるが，チルンハウス変換を行えない

場合でもワイエルシュトラス座標を選ぶと同じ効果があることが知られている．ワイエルシュトラス座標を整数係数の場合に拡張することにより定義方程式の特異点の「極小性」に相当する性質が得られるかどうかも研究したが十分な結果は得られていない．

（４）本研究の目標の１つであった実２次体と虚２次体の違いを反映しているような特異点の性質は発見できなかった．特異点は代数体の分岐と関係するためデデキントゼータのオイラー因子の形と直接関係するが，それ以上の関係は見つけられなかった．

（５）上記の結果により，本研究者は研究対象を代数体の定義方程式から古典的な底式にうつすことにした．代数体には定義方程式による定義の他に底式を用いた記述がある．一変数で扱いやすい定義方程式と異なり，底式は多変数ではあるものの一意性がある．高次元空間におけるその特異点集合が，代数体の数論的な性質を反映している可能性もある．この研究で得られた結果の１つは，底式の特異点集合はヒルベルトが数論報告で単位元形式（Einheitsform）と呼んだ同次式の零点集合に含まれることが証明できたことである．しかし逆の包含関係，すなわち零点集合全体と一致するかどうかを示すことができていない．そのため発表するには今のところ十分な結果ではない．

（６）代数体の単位元形式が消えるような素数上における底式の特異点の性質もまだ分からない．単位元形式は単元を成分とする行列式で定義され判別式に似ているので，その零点集合はモジュライ空間の境界に似たような性質があると思われるが，具体例の計算が難しいため，確かめることが難しい．

（７）続けて底式の性質を研究するために，同次式全体の中で代数体の底式となるような同次式の特徴付けを試みることにした．一般の代数体の底式は変数も多く次数も高く計算量が多くなって難しいので最初に２次体の場合を計算した．すなわち，不定元２個の整数係数同次式を係数とする一般の１変数２次形式 x^2+aux+bvx+vu^2+duv+ev^2 が，ある２次体の底式になるための条件をコンピュータで計算してみた．この場合は係数に関する３次式の平方となる次のような６次式が１つ得られた．

(b^2c-abd+d^2+a^2e-4ce)^2

したがって底式の全体は整数環上の５次元アフィン空間の中の余次元１の被約部分が３次の代数的集合をなすことが分かる．ただし，異なる底式が同一の２次体を定義する条件が係数の関係式で記述できれば２次体のモジュラスが得られたことになるが，その計算は次の課題とする．このような特徴付けの研究のきっかけになったのは底式が射影代数多様体のチャウ形式，すなわちファン・デル・ヴェルデンの定義した同伴形式とよく似ているからである．ファン・デル・ヴェルデンは同伴形式を用いて交点重複度を定義したり，代数曲線のモジュライ空間を構成しているから，代数体についても底式の係数がチャウ座標のような興味深い性質をもつことを期待したからである．ただし，チャウ座標が線形多様体や超曲面の場合を除くと具体的な計算が難しいのと同様に，代数体の底式も次数が高いと計算が難しい．

（８）底式の研究は３次体以上になると変数が増えて急速に計算が困難になるため，２次体について詳しく研究することにした．２次体は古典的には２元２次形式の理論の発展であるが，２次形式そのものは幾何学的な対象であるから代数体とは関係なく純粋に幾何学的にその性質を研究できるであろうという指針で，これまで知られている結果を調べることにした．この立場で改めて２次式から派生する射影２次曲線のもつ整数環上の特異点の特徴を調べてみた．2 次であっても無限に近いものを含めて２重点が２つ以上ある場合があるがどれも剰余体は素体の例しかみつからない.現時点で 2 重点の剰余体が素体上の拡大を引き起こしている例は見つからなかった．

（９）２次形式の不変量は判別式であるから，一般２次式の判別式 x^2-4yz=0 で定義される整数係数２次平面射影曲線をＣとし,Ｃの向きを保つ自己同型群である全モジュラー群 PSL_2(Z)の射影平面への作用を調べた．Ｃ の内側の点は判別式が負の 2 次形式に対応し，これの簡約や類数の計算は実数の範囲だけでできる.これは古典的な結果であるが，拡大で生じる複素数の概念を必要とせず，実射影平面の初等幾何学の操作だけでできることはあまり注意されていない.また,Ｃの内部にある整数係数射影直線はその直線の極（Pol）に対応する判別式が正の 2 次形式に対応し,これの簡約や類数計算も当然ながら実数の範囲のみでできる.これらの高次元化はこれからの研究課題である．

（１０）今回の研究で得られた成果は多岐にわたるが，いずれも部分的であって十分な結果とはいえない．これらをより完成された形で発表できるまで研究を続ける必要がある．

５．主な発表論文等

なし．

６．研究組織
(1)研究代表者
前田　博信 (MAEDA HIRONOBU)
東京農工大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号：５０１７３７１１

(2)研究分担者
　なし.

(3)連携研究者
　なし