

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 5 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010 ～ 2012

課題番号：22654008

研究課題名（和文）

曲線複体上の力学系と写像類群の漸近構造

研究課題名（英文） Dynamics on curve complexes and asymptotic structure of mapping class groups

研究代表者

大鹿 健一 (KEN' ICHI OHSHIKA)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70183225

研究成果の概要（和文）：

Klein 群の変形空間，指標多様体，写像類群の部分群で，Heegaard 分解や knot の bridge 分解を保つものなどの様々な幾何学的対象，特にそれらの大域的構造を曲面複体とその上の写像類群の作用を用いることにより，研究した．また Teichmüller 空間の非 Hausdorff 的コンパクト化を構成し，曲線複体への写像類群の作用を用いて，その自己同相群が（拡張された）写像類群に一致することを示した．

研究成果の概要（英文）：

We studied various geometric objects, like deformation spaces of Kleinian groups, character varieties and subgroups of mapping class groups preserving Heegaard splittings and bridge decomposition, in particular their global structures, using curve complexes and their actions of mapping class groups. We also constructed non-Hausdorff compactifications of Teichmüller spaces, and using the mapping class group actions on curve complexes, showed that their symmetry groups coincide with the extended mapping class groups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,000,000	0	1,000,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	480,000	3,080,000

研究分野：数学系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：曲線複体，写像類群，漸近幾何，変形空間，指標多様体

## 1. 研究開始当初の背景

1980 年代に Hatcher により導入された曲線複体の概念は，1990 年代後半から 2000 年代に，Masur-Minsky による一連の研究により，Teichmüller 空間の擬等長近似モデルとしての役割を果たすことが明らかになった．その中で，この複体は Teichmüller 空間がそ

の thin part に関して相対的に Gromov の意味で双曲的であるという顕著な性質を示すのに用いられた．

さらにその類似物として，パンツ複体，標識複体，train track 複体などが考えられ，パンツ複体は Teichmüller 空間の Weil-Peterson 計量，残りの 2 つは写像類群

の語距離の擬等長モデルになることがわかった。これらの複体の大域的構造を研究することは、Teichmüller 空間、写像類群さらには、Klein 群の変形空間や指標多様体など長い研究の歴史を持つ重要な対象に対する新しい洞察を生むことが期待された。そしてやがては Klein 群などの対象と、3次元多様体論に現れる様々な幾何学的、代数的対象の統一的な理解が生まれることが望まれていた。

## 2. 研究の目的

曲線複体とその上の写像類群の作用を用いて、次に挙げるような、問題に取り組むことが本研究の目的である。

- (1) Klein 群の変形空間、及びより大きな空間である、指標多様体の大域幾何的構造を曲線複体による近似の手法を用いて調べる。
- (2) Teichmüller 空間の様々なコンパクト化とその上の写像類群の作用を曲線複体を用いて解析する。
- (3) 写像類群自体の大域的構造、漸近的構造を曲線複体を用いて研究する。
- (4) 複素力学系の研究に曲線複体で開発された手法を応用する。

## 3. 研究の方法

まず大阪大学でのセミナーを通じて、曲線複体に関する最新の結果を研究代表者、分担者、連携研究者が吸収した。この知識を基に、それぞれの問題に取り組んだ。

- (1) Klein 群の変形空間、指標多様体の大域的構造の研究については、大鹿が、特に後半部分は、韓国 KIAS においての共同研究を行うことによって、進めた。
- (2) Teichmüller 空間のコンパクト化とその群作用に関する研究は、大鹿が単独で遂行し、研究過程で、Oberwolfach, KIAS などでの発表を通じて、内容を深めていった。
- (3) 写像類群の大域的構造については、研究期間の後半になってから始めることになった。特に Heegaard 分解や bridge 分解で保存される写像類群の部分群に焦点をあて、広島大学の作間氏、Warwick 大学の Bowditch 氏との共同研究を軸として、進めていった。
- (4) 複素力学系への応用については、角が Urbanski 氏との共同研究を中心として、推進した。

## 4. 研究成果

以下のような研究成果を得た。

(1) 自由 Klein 群に対して、primitive stability の概念が定義されている。Schottky 群は primitive stable であるが、Schottky 空間の境界には primitive stable でない群があることが知られていた。大鹿は Woojin Jeon, In Kang Kim, Cyril Lecuire との共同研究において、自由 Klein 群が primitive stable になるための必要十分条件を与えた。さらにこれを発展させた、In Kang Kim, Cyril Lecuire との共同研究により、Schottky 群以外の任意の自由 Klein 群は primitive stable な閉多様体への表現により近似できることを証明した。この研究には、曲線複体を用いたモデルの構成理論が使われている。

(2) 大鹿は Teichmüller の Bers コンパクト化の reduction を考えることによって、Teichmüller 空間の non-Hausdorff コンパクト化で、写像類群の作用が連続に拡張するようなものを構成した。このコンパクト化は集合的には unmeasured lamination space の部分空間になるがそれとは位相が異なる。さらにこのコンパクト化の境界の自己同相群は拡張された写像類群と一致することを示した。この証明には、曲線複体への写像類群への作用の性質が使われている。

(3) Heegaard 分解や bridge 分解を考えると、分解を保存する自己同相からなる写像類群の部分群は、重要な研究対象である。大鹿は作間誠、Brian Bowditch との共同研究により、この群の曲線複体への作用を分析することにより、群が各 handlebody の meridians で生成される群への自由積分解を持つことを示した。

(4) 角は Urbanski らとの共同研究をはじめとして、Riemann 球への正則作用の半群の力学系の研究を続けた。特に、ランダムな力学系の問題では、各写像がもっている Julia 集合が打ち消し合うことにより、カオス的部分が消滅していくことを証明した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- (1) Ken'ichi Ohshika, A note on the rigidity of unmeasured lamination spaces, to appear in Proc. AMS (2013)
- (2) Ken'ichi Ohshika, Reduced Bers boundaries of Teichmuller spaces, to appear in Ann. Inst. Fourier (2013)
- (3) Woojin Jeon, Inkang Kim, Ken'ichi Ohshika with Cyril Lecuire, Primitive stable representations of free Kleinian groups, to appear in Israel J. Math. (2013)
- (4) Hiroki Sumi, Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups II: fiberwise dynamics and the Julia sets, to appear in J. London Math. Soc.
- (5) H. Sumi, M. Urbanski, Transversality family of expanding rational semigroups, Adv. Math. 234 (2013), 697—734.
- (6) H. Sumi, M. Urbanski, Bowen parameter and Hausdorff dimension for expanding rational semigroups, Disc. Cont. Dynam. Systems, 32 (2012), 2591—2606.
- (7) Ken'ichi Ohshika, Realising end invariants by limits of minimally parabolic, geometrically finite groups, Geometry & Topology, 15, (2011), 827—890
- (8) Hiroaki Sumi, Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups I: connected components of the Julia sets, Discrete and Continuous Dynamical Systems 29 (2011), 1205—1244
- (9) Hiroaki Sumi, Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps, Proc. London Math. Soc. 102 (2011), 50—112
- (10) H. Sumi, M. Urbanski, Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups, Ergodic Theory and Dyn. Syst. 30 (2010), 601—633

[学会発表] (計 11 件)

- (1) K. Ohshika, Deformation spaces of Kleinian groups, in Teichmuller Theory Geometry Master Class, Erwin Schrodinger Institute for Mathematical Physics, Vienna, Austria, 25, 26, 27 March 2013
- (2) K. Ohshika, Automorphism groups of Heegaard splittings and bridge decompositions, Workshop on

- hyperbolic geometry, geometric structures and bounded cohomology, KIAS, Seoul, Korea, 22 November 2012
- (3) K. Ohshika, Subgroups of mapping class groups generated by Dehn twists around meridians on splitting surfaces, Aspects of representation theory in low-dimensional topology and 3-dimensional invariants, Carry-le-Rouet, France, 8 November 2012
  - (4) K. Ohshika, Actions of isomorphism groups of Heegaard splittings on projective lamination spaces, KIAS Geometry Fair, KIAS, Daejeon, Korea, 13 August 2012
  - (5) K. Ohshika, Two kinds of reduced boundaries of Teichmuller spaces and their symmetries, Group Actions in Geometry, Topology and Analysis, 昆明理工大学, 昆明, 中国, 24 July 2012
  - (6) H. Sumi, Stability, bifurcation and classification of minimal sets in random complex dynamics, Workshop on non-uniformly hyperbolic and neutral one-dimensional dynamics, NUS, Singapore, 25 April 2012
  - (7) K. Ohshika, Reduced Bers boundaries and their symmetries, Workshop on Hyperbolic geometry, bounded cohomology and symmetric spaces and related topics, KIAS, Seoul, Korea, 8 September 2011
  - (8) H. Sumi, Cooperation principle and stability in random complex dynamics, Goettingen-Penn State International Summer School on Dynamical Systems, 10 August 2011
  - (9) K. Ohshika, Various ways of compactifying Teichmuller spaces and end invariants of Kleinian groups, Teichmuller theory, MFO Oberwolfach, Germany, 29 November 2010
  - (10) K. Ohshika, Local topology of the boundaries of quasi-Fuchsian spaces, Hyperbolic Geometry and related topics, KIAS, Seoul, Korea, 16 September, 2010
  - (11) H. Sumi, Cooperation principle and disappearance of chaos in random complex dynamics, Conference on complex analysis, University of Illinois, Urbana-Champaign, USA, 21 May 2010

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

大鹿 健一 (KEN' ICHI OHSHIKA)  
大阪大学大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 70183225

(2) 研究分担者

角 大輝 (HIROKI SUMI)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号 : 40313324

(3) 連携研究者

金 英子 (EIKO KIN)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号 : 80378554