

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2011

課題番号：22654013

研究課題名（和文）

量子論の実在論的解釈を目指した量子集合論の研究

研究課題名（英文）

Quantum Set Theory Aiming at Realistic Interpretation of Quantum Theory

研究代表者

小澤 正直 (OZAWA, Masanao)

名古屋大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：40126313

研究成果の概要（和文）：量子論の実在論的解釈の問題は、幾多のパラドックスを生み、量子論の基礎に関する重要な未解決問題である。本研究は、この問題に数学基礎論の方法を導入して、量子集合論というチャレンジ性のある新しいアプローチを開拓して、量子論の実在論的解釈の実現を目指した。一般の完備オーソモジューラー束上の量子集合論を展開して、量子論の様相解釈の基礎を与え、代数的量子論の枠組みでボーアの相補性原理における実在概念を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：The problem of realistic interpretation of quantum theory has produced several paradoxes and remains an important open problem in foundations of quantum theory. In this study we introduced methods of foundations of mathematics into this problem, and constructed quantum set theory, a challenging new approach, aiming at a realistic interpretation of quantum theory. We developed quantum set theory over a general orthomodular lattice, gave foundations of modal interpretation of quantum theory based on it, and clarified the notions of reality in Bohr's complementarity principle.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,500,000	0	1,500,000
2011年度	1,300,000	390,000	1,690,000
総計	2,800,000	390,000	3,190,000

研究分野：量子情報科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論・量子情報・科学哲学・量子論理・量子集合論・量子測定理論・様相解釈・代数的場の量子論

1. 研究開始当初の背景

(1) 量子集合論は、Birkhoff と von Neumann の量子論理と Cohen による連続体仮説の独立性証明で導入された強制法を起源に持つ。強制法は、1970年代以後、数学の他の概念と結びつき、概念的深化がなされた。その1つに、層の概念と非標準論理に基づく集合概念の結びつきがあり、集合論の Boole 値モデルから、トポス、直観主義的集合論をへて、1978年に竹内外史によって量子集合論が導入された。量子集合論は、量子論理に基づく数学を極めて自然な形で導出す

ると予想され、その基盤の上に量子論を再構築することは、量子論基礎論における強力なプログラムと見なされてきた。しかし、その後、本研究代表者の研究が現れるまで、量子集合論の研究は、長いこと停滞していた。その理由として、Gibbins は著書『量子論理の限界』で竹内の論文を引用しつつ、量子集合論は、等号の推移律や代入規則が一般には成立しないなど極めて不規則な体系であると同時に、多くの Boole 値モデルを内部モデルとして含み、そこでは ZFC 集合論が成立するという極めて複雑な対象であるというような、

量子論理に基づく数学の圧倒的複雑さにあると述べている。最近、千谷らによって、竹内と異なる含意結合子の下で類似の研究が進められている。しかし、その含意結合子は、0と1の2値しか取らないトリビアルなもので、量子論への応用が困難であり、それを量子集合論と呼ぶことには異論がある。また、量子論的集合概念への異なるアプローチとして、1990年代から C. Mulvey によって、quantale 上の集合概念の研究が始められた。これは、トポスの非可換 C^* -環への拡張と考えられるが、本研究のような高階の集合論は未構築で、実数論を展開し、量子論に応用するレベルには至っていない。本研究は、量子情報理論や量子論の様相解釈などの最新の成果を援用することで量子集合論のあるべき姿を構想し、上記の困難を克服して、量子集合論を展開し、量子論の再構築と解釈の拡張を実現するという点で斬新なアイディアとチャレンジ性を有している。

(2) 量子論の基礎に関しては、これまで、Hilbert 空間論、作用素環論、および、射影幾何や連続幾何と結びついた束論によるアプローチがあったが、本研究は、量子集合論という全く新しいアプローチを開拓して、量子集合論が作用素環論や束論等の数学的表現力を上回る強力な数学理論であることを明らかにすることを目的とする。量子論基礎論では、1935年の Einstein-Podolsky-Rosen のパラドックスの発見以来、隠れた変数理論の可能性に関する研究が盛んに行われて来た。1967年に Kochen-Specker の定理が発見されて以来、この問題に対して、量子論理が重要な役割を果たしている。1964年に発見された Bell の不等式の実験的検証に成功した 1980年代前半以降、量子物理量の値の实在論的解釈を巡り活発な研究が展開されている。とりわけ、量子論理への様相論理的アプローチから導かれた量子論の様相解釈が 1970年代に van Fraassen によって提案され、その提案を巡り、今日まで量子論の構造と解釈に関する多くの研究がなされた。この研究の到達点と見なされる Bub-Clifton による様相解釈の一意性定理は、同時に実在的な値を所有できる量子物理量の極大集合を特徴付ける。1999年に Halvorson-Clifton により作用素環的な定式化が得られ、現在、この定理の代数的場の量子論への拡張が試みられている。にもかかわらず、Redhead は著書『不完全性・非局所性・实在主義』で、量子論の实在論的解釈に対する量子論理に基づくアプローチを検討して、本質的な解決を導かないと批判している。しかし、この批判は、従来の量子論理の研究が命題論理に留まって、物理量の間関係を扱うことができなかったことに由来すると考えられる。本研究は、量子集合論におけ

る実数と量子物理量の対応を利用して、実数論における実数の間の関係から直ちに量子物理量の間量子論理的関係が導かれるという全く新しい論理的方法の提案を行なうものであり、これまでの研究で解明できなかった量子論の实在論的解釈を実現するために、量子論と集合論というこれまで全く接点がなかった二つの分野を横断する学際的研究の新しい方法を提案する。これは、経験科学の基礎を数学基礎論の方法で与える Hilbert のプログラム(第6問題)を先端的方法で実現することを目指した研究で、挑戦的萌芽研究の課題にふさわしい。

(3) 本研究代表者は、1980年代から集合論の強制法を作用素環論に統一的に応用するために Boole 値解析学を研究して、1984年に、1952年以来未解決だった I 型 AW*-環(von Neumann 環の代数的一般化)の分類に関する Kaplansky 予想を基数崩壊の現象を利用して解決し、更に、Boole 値モデルの基数を不変量に利用して I 型 AW*-環の分類を完成させた。この研究により、Boole 値モデルを一般化した量子集合論を展開し、量子論に応用する手法を獲得した。一方、作用素環上の完全正值写像の研究から、1984年に、量子測定概念の数学的特徴付けの問題を解決して、量子測定理論の基礎を確立し、1988年には、この理論により重力波検出限界に関する論争を解決した(*Nature* 誌 [Vol. 331, p. 559 (1988)], *News and Views* で報道)。2003年には、この理論に基づき、Heisenberg の不確定性原理を打破する測定のモデルを示し、新たに測定誤差と擾乱に関する普遍的な不確定性原理を確立した(日経産業新聞 2004年1月15日、日経サイエンス 2004年9月号、2007年4月号等で報道)。この不確定性原理の新しい定式化から、量子同一性相関の概念を導入し、その後、量子同一性相関と量子集合論における相等関係の類似性から、量子集合論に基づいて量子論の解釈を拡張するという本研究の基本的着想を得た。2006-2007年度科研費萌芽研究の助成を受け、von Neumann 環の射影束を論理とする量子集合論のモデルの研究を行い、(i) ZFC 集合論の定理の有界論理式に対する移行原理、(ii) 量子集合論内の実数論と von Neumann 環に付随する自己共役作用素の理論の同等性、(iii) 量子同一性相関と量子実数の相等関係の同等性等の結果を得た。また、2008-2009年度科研費萌芽研究の助成を受け、任意の完備オソモジュラー束に基づく量子集合論のモデルを構築し、これらの成果の究極的な一般化を行なった。とりわけ、ZFC 集合論の定理の移行原理を、一般の非有界論理式に拡張した。これらの成果により、量子論の観測命題の全体が量子集合論の論理式に埋め込まれ、それ

によって観測命題の範囲と解釈を統一的に拡大できることが示された。

2. 研究の目的

(1) 量子集合論を展開し、量子集合論で構成される実数論を量子論の量子測定理論に応用することにより、量子測定概念を含む量子論の広い範囲の観測命題に量子論理に基づく統一的な解釈を導入する。この解釈により、量子論理的解釈から自動的に古典論理的解釈の文脈依存性が導かれ、様々な文脈を統一する量子論理の役割を明らかにする。そのことにより、従来、同等とされていた量子物理量の同時決定可能性と同時測定可能性との概念的差異を明らかにして、観測問題や EPR パラドックスを解明する。

(2) 本研究の特色・独創的な点は、量子論と集合論というこれまで全く接点がなかった二つの分野を横断する学際的研究という点にある。目標とする結果と意義は、量子論の实在論的解釈を量子論理により実現し、量子情報など現在の物理学で最も研究が活発な分野に数学基礎論の概念と方法を導入し、新しい数学理論を開拓することにある。

3. 研究の方法

(1) 平成22年度は、量子集合論の基礎理論を確立した。とりわけ、一般の完備オーソモジュラー束を量子論理とし、また、含意結合子の広いクラスに対して、量子集合論とそれに基づく量子実数論を展開して、相当関係、順序関係の量子論的解釈を明らかにした。平成23年度は、主に量子論の实在論的解釈への応用に関する研究を行った。

(2) これらの計画の実現のために、国内の関連領域の研究者をセミナーに招き、研究発表および討論に参加してもらった。関連分野の研究会・学会に広く参加するとともに、それらの分野の研究者とも緊密な研究連絡・共同研究をした。関係する分野の国際会議に参加して研究発表をし、また、国外の関連分野の研究者を訪問または招聘して、共同研究を行った。とりわけ、当該分野における内外の著名な研究者20数名を招聘して、平成23年2月14-18日に The Second Nagoya Winter Workshop on Quantum Information, Measurement, and Foundations を平成24年2月14-18日に The Third Nagoya Winter Workshop on Quantum Information, Measurement, and Foundations を開催した。また、国内の若手研究者を招いて、平成22年4月24-25日に第6回科学基礎論春のセミナーを開催した。

4. 研究成果

(1) 量子実数と量子物理量の関係：von Neumann 環の射影束上の量子集合論における量子実数（量子集合論で定義される実数）と量子物理量の間の特等関係を任意の完備オーソモジュラー束上の量子集合論に拡張した。

(2) 量子実数の可換性と量子物理量の同時決定可能性の関係：量子実数の集まりについて、ある状態で可換性が成立することとその状態における結合確率分布が存在することが特等であることを示し、様相解釈における Clifton-Halvorson の極大存在可能代数の理論との関係を明らかにした。

(3) 量子集合論に基づく量子測定理論の展開：これまでに知られている、測定過程がある量子物理量の測定である条件は、測定が行なわれる状態に依存しない定式化で、与えられた状態のもとで測定過程がある量子物理量の測定である条件は、これまで知られてこなかった。本研究では、この条件を量子集合論に基づく量子物理量の値の特等関係から導いた。すなわち、測定の特等条件において、測定前の被測定量と測定後のメーターの値が一致する条件によって、量子物理量の測定概念が特徴付けられることを示した。

(4) 代数的量子論における实在性概念：Halvorson と Clifton は Einstein, Podolsky, Rosen (EPR) に対する Bohr の回答を数学的に再構築し、客観性の要求と Howard の先行研究によって導入された文脈化された EPR の实在性基準の特等性を証明することにより、この回答が実験データの記述に関する古典性と客観性の要求から導かれていることを議論した。本研究では、この整合性定理を EPR 状態の一般的定式化に基づくものへ拡張し、量子力学と場の量子論の双方に適用可能なものとした。これにより、代数的量子論の一般的定式化において Bohr による古典的記述の概念によって EPR 状態のもつ实在の要素を明らかにした。

(5) 量子集合論における強制概念：量子集合論に強制概念を導入して、量子状態が実数の命題を強制する事と、その状態の下で、対応する観測命題が成立する事が特等になる事を証明した。これから、量子集合論の真理値が、その観測命題を強制する状態全体の集合で表現される事が導かれる。

(6) 量子論の様相解釈との関連：量子論の様相解釈では、所与の状態のもとで同時に所有値を持つと考えられる物理量の集合のうち極大なものを極大存在可能部分環(maximal beable subalgebra)と呼んで、その特徴付けが重要な研究課題とされている。一方、量子集合論では、いくつかの量子集合が所与の状態でも可換であることを意味する述語が定義され、ZFCの移行原理では、所与の状態のもとで、与えられた量子集合がすべて可換であれば、その状態はZFCの任意の定理の自由変数にその量子集合の名前を代入した論理式を強制することが主張される。この成果をふまえて、所与の状態のもとで、ある量子実数の集合が可換であることと、対応する物理量の集合がその状態に対する一つの極大存在可能部分環に属することが同等である事を証明した。このことから、物理量の集合が所与の状態の一つの極大存在可能部分環に属する事と対応する量子実数を定項とするZFCの任意の定理がその状態で強制されることが同等であることが示された。様相解釈では、極大存在可能部分環に属する物理量は、その値を決定する隠れた変数が存在すると解釈される。隠れた変数の存在を特徴付ける条件として、従来、Bellの不等式などが提唱されてきたが、本研究では、上述の成果から、隠れた変数の存在を「定項の集合がZFC集合論の任意の定理を満たす」という論理学的条件で特徴付けることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① M. Ozawa, Mathematical foundations of quantum information: Measurement and foundations, Sugaku Expositions (in press) (2012). 査読有
- ② M. Ozawa and Y. Kitajima, Reconstructing Bohr's Reply to EPR in Algebraic Quantum Theory, Foundations of Physics 42 (4), 475-487 (2012). 査読有 doi:10.1007/s10701-011-9615-7
- ③ J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa, Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin-measurements, Nature Physics 8, 185-189 (2012). 査読有 doi:10.1038/NPHYS2194
- ④ 小澤正直, 量子力学における測定・相関・文脈性, 素粒子論研究 119 (4A),

D210-D228 (2012). 査読無

- ⑤ 小澤正直, 北島雄一郎, 科学の示す実在像について: ボーア=アインシュタイン論争研究の最前線 (特集=ニュートリノ/相対論 観測がひらく新世界), 現代思想 40, 138-160 (2012). 査読無
- ⑥ M. Ozawa, Universal uncertainty principle, simultaneous measurability, and weak values, AIP Conference Proceedings 1363, 53-62 (2011). 査読有 doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.3630147
- ⑦ M. Ozawa, Quantum reality and measurement: A quantum logical approach, Foundations of Physics 41, 592-607 (2011). 査読有 doi:10.1007/s10701-010-9462-y

[学会発表] (計13件)

- ① 小澤正直, ボーアの実在性基準の代数的量子論における数学的再構成, 基礎物理学研究所研究会「物理と情報の階層構造: 情報を接点とした諸階層の制御と創発」2012.1.6, 京都大学 (京都).
- ② 小澤正直, 測定と実在: EPR に対する Bohr の回答 (招待講演), 科学基礎論学会 2011 年度秋の研究例会, 2011.11.6, 日大文理学部 (東京).
- ③ M. Ozawa, Quantum Correlation, Measurement and Contextuality (招待講演), QUIT Seminar, 2011.7.4, Pavia, Italy.
- ④ M. Ozawa, Quantum Correlation, Measurement and Contextuality (招待講演), Clarendon Laboratory Seminar, 2011.6.23, Oxford, UK.
- ⑤ M. Ozawa, Simultaneous measurements and weak values (招待講演), International conference "Foundations of Probability and Physics-6" (FPP6), 2011.6.16, Vaxjo, Sweden.
- ⑥ M. Ozawa, Quantum set theory and foundations of quantum mechanics (招待講演), Departmental Seminar, Oxford University, Department of Computer Science, 2011.5.31, Oxford, UK.
- ⑦ M. Ozawa, Measurement, correlation, and contextuality in Quantum Mechanics (招待講演), Quantum Information and Foundations Seminar, 2011.5.26, Cambridge, UK.
- ⑧ M. Ozawa, Measurement, Correlation, and Contextuality in Quantum Theory, The Second Nagoya Winter Workshop on Quantum Information, Measurement, and Foundations, 2011.2.17, 名古屋大学 (愛知).

- ⑨ 小澤正直, 測定・相関・文脈性, 第 23 回量子情報技術研究会 (QIT23), 2010.11.16, 東京大学 (東京).
- ⑩ 小澤正直, 量子力学における測定・相関・文脈性, 基研研究会「量子科学における双対性とスケール」, 2010.11.5, 京都大学 (京都).
- ⑪ M. Ozawa, Universal uncertainty principle, simultaneous measurability, and weak values, The Tenth International Conference on Quantum Communication, Measurement and Computation (QCMC 2010) 2010.7.19, University of Queensland, Brisbane, Australia.
- ⑫ 小澤正直, 量子力学における測定と実在, 科学基礎論学会 2010 年度講演会, 2010.6.13, 専修大学 (神奈川).
- ⑬ 小澤正直, 量子力学の統計的解釈と論理的

解釈, 科学基礎論春のセミナー2010, 2010.4.25, 名古屋大学 (愛知).

[その他]

ホームページ:

<http://www.math.cm.is.nagoya-u.ac.jp/~ozawa/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

小澤 正直 (OZAWA, Masanao)

名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号: 40126313

(2)研究分担者なし

(3)連携研究者なし