

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2012

課題番号：22654014

研究課題名（和文）

ナビエ・ストークス方程式の解の共変リヤプノフ解析

研究課題名（英文）

Covariant Lyapunov analysis of solutions of the Navier-Stokes equations

研究代表者

山田 道夫 (YAMADA MICHIO)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：90166736

研究成果の概要（和文）：

非圧縮性2次元Navier-Stokes方程式の解である2次元トーラス $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^2$ の上のKolmogorov流を対象として、共変リヤプノフ解析によるカオス状態の解析を行った。解の分岐ダイアグラムを調べた後、カオスが発生するReynolds数の前後において従来のリヤプノフ解析を実行し、カオス発生時のReynolds数 $Re/Rc \sim 18$ において第一リヤプノフ数が正となること、また $Re/Rc \sim 23$ において第二リヤプノフ数も正となることを見出した。このデータに基づいてGinelli et al. (2007)による共変リヤプノフベクトルを計算し、解軌道に沿う安定/不安定多様体の接空間のなす角度の分布を求めることで、カオス化直後は解軌道は双曲的であるが、第二リヤプノフ数が正に転じるReynolds数付近で非双曲的となることを見出した。またこの双曲/非双曲の転移点において空間の一点の渦度の時間相関関数の関数形が振動的から非振動的に変化することを見出した。

研究成果の概要（英文）：

We studied chaotic states of Kolmogorov flows on a 2D flat torus $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^2$ governed by the Navier-Stokes equations of incompressible fluids, by using the covariant Lyapunov analysis. Obtaining the bifurcation diagram of solutions, we performed the traditional Lyapunov analysis, and found that the first Lyapunov number becomes positive at $Re/Rc \sim 18$, and the second one does at $Re/Rc \sim 23$. Based on these data, we calculated the covariant Lyapunov vectors by the method of Ginelli et al. (2007), and found that the solution orbit is hyperbolic just after the chaotic transition, but becomes nonhyperbolic at $Re/Rc \sim 23$, by observing the distribution of the angle between the stable/unstable tangent spaces of the orbit. At the hyperbolic/nonhyperbolic transition point, we found that the functional form of the time correlation function of the vorticity changes from oscillatory to non-oscillatory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	0	1,200,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	420,000	3,020,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：応用数学，流体，カオス

1. 研究開始当初の背景

リヤプノフ数は力学系のカオス軌道の不安定性を特徴づける基本的な量である。しかし従来のリヤプノフ数の数値計算は Gram-Schmidt の直交化を経由するため、リヤプノフベクトルの方向が安定多様体および不安定多様体と直接の関係を持たないという大きな欠点を抱えていた。これに対し漸く 2007 年に Ginelli らが、直交化を用いずに系に共変的に発展するリヤプノフベクトルを計算する数値手法を開発し共変リヤプノフ解析と名付けた(Ginelli et al. PRL, 99(2007) 130601)。これは、従来のリヤプノフ解析よりも多量の計算を必要とするが、その結果として、軌道上の各点における安定/不安定多様体の接空間(すなわち Oseledec 分解)を求めることが可能となった。

共変リヤプノフ解析は、Oseledec 分解の実際的計算法として初めてのものであり、これにより力学系の双曲性/非双曲性の数値計算が可能になった。双曲性の概念は、力学系の理論において非常に基本的なものであり、特に多くの力学系の性質の証明において非常にしばしば仮定されるものである。しかし具体的な力学系、特に微分方程式で記述される力学系において双曲性の仮定が成り立っているかどうかは判定が非常に難しく、Ginelli らの方法以前には判定のための汎用的な数値的手法は存在していなかった。彼らの方法によって初めて、具体的な力学系における双曲性/非双曲性を数値的に論じる方法が与えられた。

Ginelli らの手法は 2007 年の提案から短期間のうちに、Henon 写像など多くの 1 次元写像や結合シンプレクティック写像、少数自由度の常微分方程式系、Kuramoto-Sivashinsky 方程式など比較的簡単な 1 次元偏微分方程式系に適用され、安定多様体と不安定多様体の接構造の可能性(非双曲性)やカオスの自由度、時空カオスの空間局在化などが見出されている(Yang et al. PRL 102(2009)074102 など)。しかし本格的な Navier-Stokes 方程式への応用は、本研究による Kolmogorov 流への適用が初めてであり、特に具体的な Navier-Stokes 流における双曲/非双曲転移やそれに伴う物理的性質の変化は本研究において初めて見出されたものである。

2. 研究の目的

カオス解析の新しい手法である共変リヤプノフ解析を Navier-Stokes 方程式の解に用いて、力学系的観点からみた流体方程式の解

の性質の記述、特にカオス解の安定/不安定多様体の特徴から流れの性質を理解することを目的とする。

従来の Schmidt の直交化を用いるリヤプノフ解析とは異なり、共変リヤプノフ解析は解の安定/不安定多様体に伴う Oseledec 分解を計算可能とした初めての数値手法であり、特に本格的な Navier-Stokes 方程式への適用は本研究が初めてである。共変リヤプノフ解析は通常のリヤプノフ解析よりも計算量が增大するが、計算機能力の限界との競合を克服し、流体现象の力学系的特徴を捉えることを目標とした。

本研究においては、Navier-Stokes 方程式の具体的な解である Kolmogorov 流に対し、軌道不安定性の具体的な性質、特に安定/不安定多様体の交差の様子や流れ場の性質との対応についての知見を得ること、またその結果として、大自由度カオスにおける Oseledec 分解の典型例を得ることを目指した。

3. 研究の方法

本研究では、周期境界条件下における Navier-Stokes 方程式の解の共変リヤプノフ解析を数値的に実行した。数値計算は大型の並列計算機を長時間用いて行い、カオス解の解軌道上における共変リヤプノフベクトルを決定した後、安定/不安定多様体の位置関係、特に交差角度と流れの性質の関係を、統計的性質も含んで調べた。この計算を Reynolds 数を次第に増加させながら実行し、安定/不安定多様体の変化、特に双曲/非双曲転移と流れの物理的性質の変化の關係に注目して、時空カオスあるいは大自由度カオスの典型例としての Navier-Stokes 方程式の解の特徴を調べた。

4. 研究成果

2 次元トーラス $(R/2\pi Z)^2$ の上の非圧縮性 2 次元 Navier-Stokes 方程式の解である Kolmogorov 流を対象として、共変リヤプノフ解析によるカオス状態の解析を行った。

まず波数 2 の正弦型定常強制力を与え、Reynolds 数を分岐パラメータとして乱流化の過程を含む分岐ダイアグラムを調べた後、カオスが発生する Reynolds 数の前後において従来のリヤプノフ解析を実行した。その結果、カオス発生 Reynolds 数 $(Re/Rc=18.16)$ において第一リヤプノフ数が正となること、またその少し上の Reynolds 数 $(Re/Rc\sim 23)$ において第二リヤプノフ数も正となることを見出した。

次にこのデータに基づいて, Ginelli et al. (2007) の手法を用いて共変リヤプノフベクトルを計算し, 解軌道に沿う安定/不安定多様体の接空間のなす角度の分布を求めた. その結果, カオス化の直後は, 角度分布の端はゼロ度まで到達せず, 解軌道は双曲的であること, しかし Reynolds 数の増大と共に角度分布の端はゼロ度に近づき, 第二リヤプノフ数が正に転じる Reynolds 数の付近においてゼロ度に到達すること, すなわち解軌道が非双曲的となることを見出した (図 1). これは Kolmogorov 流の双曲/非双曲性が Reynolds 数依存性を持ち, その転移が第二リヤプノフ数の不安定化に関することを示唆している.

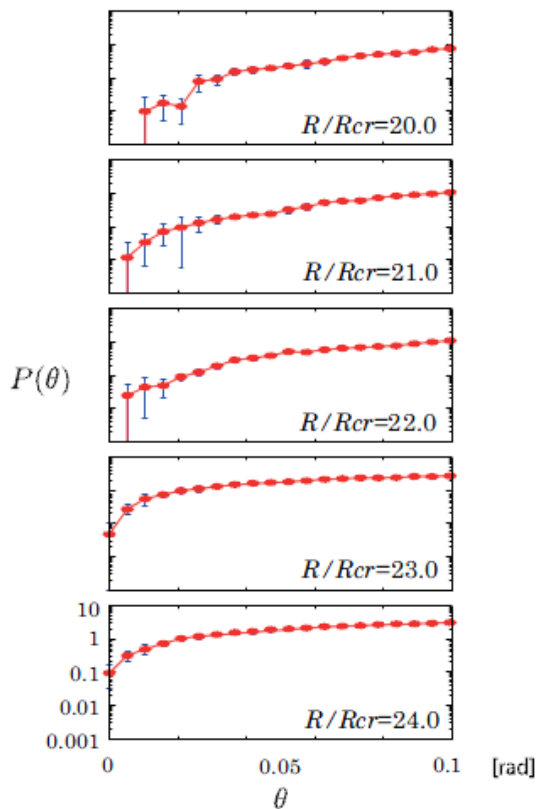


図 1 : 解軌道上の安定/不安定多様体の接空間のなす角度の分布. (Inubushi et al. 2012)

また, この双曲/非双曲の転移点において, 流れ場の物理的性質の変化に注目し, 特に空間の一点における渦度の時間相関関数の関数形の変化を調べた. これは, 双曲性の性質が系の長時間の振舞いに関係するであろうという予測に基づくものであったが, 実際時間相関関数の関数形は, 双曲/非双曲転移の前後で異なる振る舞いを示すことが見出された. すなわち時間相関関数は, 系が双曲的である Reynolds 数においては振動的な長時間相関を持つが, Reynolds 数の増大と共に

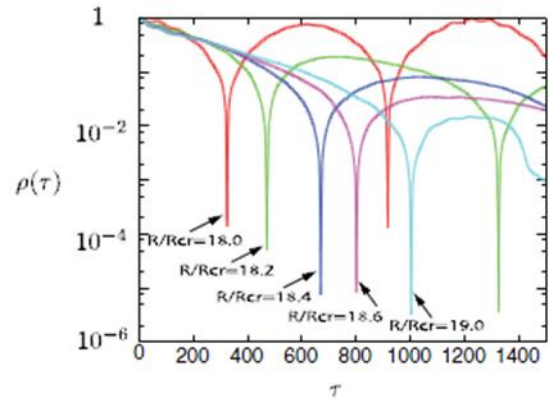


図 2 : 双曲性領域における渦度の時間相関関数の変化 (Inubushi et al. 2012)

に振動的な性質が減少し (図 2), 双曲/非双曲転移を経て, 非双曲的である Reynolds 数においては非振動的な長時間相関を持つことが見出された.

これらの結果は, Navier-Stokes 方程式において初めて双曲性領域と非双曲性領域, および双曲/非双曲転移を見出したものである. この転移の Reynolds 数が, カオス化の Reynolds 数よりも真に大きいこと, しかし同程度の大きさの Reynolds 数であること, は高次元カオスの観点からも興味深い.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① M. Yamada and T. Yoneda, Resonant interaction of Rossby waves in two-dimensional flow on a beta plane, *Physica D*, 245(1), 1-7, 2013. 査読有 DOI: 10.1016/j.physd.2012.11.001
- ② K. Obuse, S. Takehiro and M. Yamada, Weak interaction between zonal jets on a beta plane, *Japan Industrial and Applied Mathematics*, 30 (2013), 111-127, 査読有 DOI: 10.1007/s13160-012-0086-9
- ③ M. Inubushi, M. U. Kobayashi, S. Takehiro and M. Yamada, Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows, *Physical Review E* 85, 016331-1 to 10, 2012, 査読有 Doi: 10.1103/PhysRevE.85.016331
- ④ E. Sasaki, S. Takehiro and M. Yamada, A note on the stability of inviscid zonal jet flows on a rotating sphere, *J. Fluid Mech*, 710 (2012), 154-165, 査読有 DOI: 10.1017/jfm.2012.356

- ⑤ K. Obuse, S. Takehiro and M. Yamada, Linear stability of steady zonal jet flows induced by a small-scale forcing on a beta-plane, *Physica D*, 240, 2011, 1825--1834. 査読有
DOI: 10.1016/j.physd.2011.08.009
- ⑥ A. C. Chian, R. A. Rodrigo, E. L. Rempel, Y. Saiki and M. Yamada, Amplitude-phase synchronization at the onset of permanent spatiotemporal chaos, *Physical Review Letters*, vo. 104, 254102-1 to 254102-4, 2010. 査読有
DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.254102
- ⑦ K. Obuse, S. Takehiro and M. Yamada, Long-time asymptotic states of forced two-dimensional barotropic incompressible flows on a rotating sphere *Physics of Fluids*, 22, 056601, 9PP, 2010. 査読有
DOI: 10.1063/1.3407652

[学会発表] (計 20 件)

- ① M. Inubushi, Covariant Lyapunov Analysis of a Minimal Wall Turbulence, *International Conference on Fluid Mechanics 2013*, 2013. 2. 27, Barcelona, Spain.
- ② 佐々木英一, 回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式における帯状流解の分岐, RIMS 共同研究集会「偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的な現象の解析」, 2013. 2. 13, 京都大学.
- ③ 犬伏正信, ミニマルケット乱流に見られる再生成サイクルの軌道不安定性について, RIMS 共同研究集会「多重物理・多重スケール乱流現象の数理」, 2013. 1. 09, 京都大学.
- ④ 佐々木英一, 回転球面上の帯状流の分岐とカオス軌道, RIMS 共同研究集会「多重物理・多重スケール乱流現象の数理」, 2013. 1. 9, 京都大学.
- ⑤ M. Yamada, Orbital instability of a minimal wall turbulence, *Mathematical Theory of Turbulence via Harmonic Analysis and Computational Fluid Dynamics*, 2012. 12. 7, Nagoya, Japan.
- ⑥ S. Takehiro, Differential rotation and angular momentum transport caused by thermal convection in rotating spherical shells, *Progress in physics of the sun and stars: a new era in helio- and astroseismology*, 2012. 11. 25, Hakone, Japan.
- ⑦ K. Kimura, Triaxial rotation of the inner and outer spheres driven by Boussinesq thermal convection in a rotating spherical shell, *The 13th Symposium of SEDI (Study of the Earth's Deep Interior)*, 2012. 7. 1, Leeds, UK.
- ⑧ M. Yamada, Beta plane turbulence, *Wave Turbulence Meeting 2012 in Gifu*, 2012. 3. 14, Gifu, Japan.
- ⑨ 佐々木英一, 回転球面上の流の分岐構造, 日本応用数理学会 2011 年度年会, 2011. 9. 15, 同志社大学 (今出川キャンパス).
- ⑩ 犬伏正信, Kolmogorov 流の共変 Lyapunov 解析と時間相関関数, 日本流体力学会年会 2011, 2011. 9. 7, 首都大学東京 (南大沢キャンパス)
- ⑪ M. Yamada, Numerical study of two-dimensional turbulence on a rotating sphere, *The 36th Sapporo symposium on partial differential equations*, 2011. 8. 23, Sapporo, Japan.
- ⑫ M. Inubushi, Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows and time correlation functions, *The 8th International Summer School /Conference, LET'S FACE CHAOS THROUGH NONLINEAR DYNAMICS*, 2011. 6. 2, University of Maribor, Slovenia.
- ⑬ 山田道夫, 回転球面上の流体運動, 風工学会, 2011. 5. 24, 大阪市立大学.
- ⑭ Y. Saiki, Reconstruction of chaotic saddles and classification of unstable periodic orbits of the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Far-From-Equilibrium Dynamics 2011*, 2011. 1. 6, Kyoto, Japan.
- ⑮ M. U. Kobayashi, Lyapunov analysis of intermittency in chaotic systems, *The Japan-Slovenia Seminar on Nonlinear Science*, 2010. 11. 8, Osaka, Japan.
- ⑯ Y. Saiki, On some properties of unstable periodic orbits in chaotic systems, *RIKEN Mathematical Sciences Workshop in Kamisuwa*, 2010. 9. 30, Kamisuwa, Japan.
- ⑰ 佐々木英一, 回転球面上の帯状流の分岐, 日本物理学会, 2010. 9. 25, 大阪府立大学
- ⑱ E. Sasaki, Bifurcation structure of zonal flow solutions on a rotating sphere, *Dynamics Days Europe 2010*, 2010. 9. 9, Bristol, UK.
- ⑲ M. Inubushi, Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows, *Dynamics Days Europe 2010*, 2010. 9. 9, Bristol, UK.
- ⑳ M. U. Kobayashi, A characterization of a

temporal intermittency of the GOY shell model turbulence, Dynamics Days Asia-Pacific 6, 2010.7.12, Sydney, Australia.

[図書] (計1件)

- ① 山田道夫, 朝倉数学ハンドブック応用編 (共著), 飯高茂, 楠岡重雄, 室田一雄(編), pp.175-274, 朝倉書店, 2011.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 道夫 (YAMADA MICHIO)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：90166736

(2) 研究分担者

竹広 真一 (TAKEHIRO SHIN-ICHI)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：30274426