

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月29日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2010～2011

課題番号：22654017

研究課題名（和文） 波動方程式の外部問題における極限振幅の原理の確立

研究課題名（英文） On the limiting amplitude principle for the exterior problem of the wave equation

研究代表者

久保 英夫 (KUBO HIDEO)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：50283346

研究成果の概要（和文）：

時間に関して振動する境界値を持つ波動方程式の外部問題の解の時間無限大での挙動を考察した。それは時間と空間に関して変数分離された形で表現でき、時間については境界値と同じ周波数をもつ周期関数であり、空間については対応するヘルムホルツ方程式のレゾナンスと呼ばれる特殊解となることを明らかにした。また、球対称な場合に実際にレゾナンスを構成した。以上により、波動方程式の外部問題における極限振幅の原理を定式化した。

研究成果の概要（英文）：

Large time behavior of solutions to the exterior problem whose boundary value is oscillating in time is considered. It can be expressed as a product of a time periodic function with the same period as the boundary value and the resonance of the corresponding Helmholtz equation. For the radially symmetric case, the existence of the resonance is actually proved. In conclusion, the limiting amplitude principle for the exterior problem of the wave equation with a periodic boundary value was formulated.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	600,000	0	600,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,200,000	180,000	1,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：波動方程式, 極限振幅の原理, 外部問題

## 1. 研究開始当初の背景

時間に関して振動する外力項を持つ波動方程式に対する初期値問題の解の挙動は、所謂、極限振幅の原理によって特徴付けられる。すなわち、時間について周期的に振動する力を与え続けると、そ

の振動と共鳴する周波数の波だけが生き残り、極限的には時間と空間に関して変数分離された状態が形成される事を主張するものである。更に、より一般化された双曲型方程式の解に対してもこのような特徴付けに関する多くの研究

がなされてきた。一方で、外部問題においては、最も単純な波動方程式に対してさえ、極限振幅の原理に関する考察は皆無であった。

そこで、時間に関して振動する境界値を与えるときの波動方程式に対する外部問題の解の挙動を考察し、この問題における極限振幅の原理を定式化するという問題意識に至った。より具体的な予想としては、解の極限を領域の形状(例えばガウス曲率など)の言葉で陽的に書き下すことが考えられる。

## 2. 研究の目的

極限振幅の原理は、これまで外力項の周期性が解の漸近挙動に与える影響を調べる問題として定式化されてきたが、本研究では外部問題における極限振幅の原理を定式化する。すなわち、外部問題において時間について周期的な境界値を与えるとき、解の時間無限大での挙動を障害物の形状などによって特徴付けることが目的である。

この様な問題設定は十分に意味のあるものと考えられるが、解の漸近挙動を明らかにすることはそれほど容易なことではない。実際、もし境界値が恒等的に零であり、障害物の形状が球であるならば、境界に入射する波は全て反射されるので解の挙動は単純なものとなるが、振動する境界値を与える場合、その振動に共鳴する成分が境界付近に留まるため、その様な共鳴成分を取り出して解の漸近挙動を決定することは極めて難しい課題であると言える。しかも、障害物の形状が複雑になればなる程、この問題を解決するのは困難になると思われる。直観的には、障害物が球の場合が最も扱いやすく、凸な領域、星型領域、より一般の非捕捉的な障害物の順に問題は難しさを増すと予想される。ここで、障害物が非捕捉的であるとは、荒く言って、幾何光学の法則に従う任意の軌道が、有限時間内に与えられた球の内部から抜け出せることを意味する。

更に、障害物が捕捉的な場合には、問題はより難しくなり、同時に興味深い現象が起こると予想される。例えば、障害物が二個の球の場合には、その二つの球の間を往復する幾何光学の軌道が存在する。従って、その軌道に捕捉される波の擬モードが存在することになる。一方、境界上に与えるデータも周期性を持っているので、その擬モードとの共鳴・非共鳴現象が観察されると思われる。そこで、境界での値を制御することで、軌道上に捕捉された波を開放したり、逆に、集積させたりすることが可能かどうか調べる。

以上のような研究を通して、時間に関して周期的な境界値をもつ外部問題の解の漸近挙動を考察し、その極限的な状態の特徴付けを試みる。

## 3. 研究の方法

我々の考える外部問題は、与えられた障害物の外部で斉次波動方程式を満たし、その境界で時間について周期的な値をとるような初期-境界値問題である。この問題の難しさは障害物の境界の形状と密接に関係している。そこで、研究の進め方としては、始めに、障害物として球や星型領域など単純なものを選び議論を深めた上で、徐々に境界が複雑な形状をとるような場合を考察の対象としていくこととする。

議論を進める上での指針としては、Kubota and Shirota (J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1967) を基本とする。この論文では、空間遠方で減衰するポテンシャル項と周期的に振動する外力項をもつ波動方程式の解の漸近挙動が調べられている。具体的には、ポテンシャルを与える関数と解とのペアリングを上手く用いる事で解の弱極限が計算されている。しかし、我々の問題にはポテンシャル項がないので、その代わりにどの様な関数を選びだし、解とのペアリングをとるのが有効なのか検討する。

具体的には以下の手順で研究を遂行する。

### (1) 平成 22 年度の研究計画

まず、障害物が球の場合を考える。そのとき方程式の回転不変性により、解は球対称性をもつことに注意する。考察対象の波動方程式の初期-境界値問題に時間に関するラプラス変換を施すと定常問題が得られる。その定常問題の解はレゾルベントによって与えられるので、外部領域が球の外部であることを利用してレゾルベントを詳しく解析することが可能であり、それによって元の問題の解についての情報を導く。

更に、その情報を基に、初期-境界値問題解の弱極限を具体的に計算することを試みる。このステップでは上述の論文の議論が参考になると思われる。その著者の一人である久保田幸次氏とは多数の共同研究を行っているので、同氏と意見交換を行うことで本研究の進展が見込まれる。

### (2) 平成 23 年度の研究計画

まず、障害物が星型領域またはより一般の非捕捉的な場合に、対応する定常問題のレゾルベントを用いた初期-境界値問題の解の表現公式を導き、その表現を利用して解の時間無限大での挙動を調べる。更に、これまでの研究全体を総括し、外部問題における極限振幅の原理の定式化を完成させる。

次に、障害物が捕捉的な場合に、極限振幅の原理の定式化を行うことを考える。具体的には、障害物が二個の球の場合に、その二つの球の間を往復する幾何光学の軌道上に捕

捉された波と振動する境界値との相互作用を考察する。特に、境界上に与えるデータを制御することで、軌道上に捕捉された波を開放したり、逆に、集積させたりすることが可能かどうか調べる。

#### 4. 研究成果

本研究では、外力項のない波動方程式に対する外部問題を考察し、時間に関して振動する境界値を与えるときの解の漸近挙動を特徴付け、この問題における極限振幅の原理を定式化することを目指している。より具体的には、境界において時間について周期的に振動する値を与え続けると、その振動と共鳴する周波数の波だけが生き残り、極限的には時間と空間に関して変数分離された状態が形成されるであろうことを示すことが課題である。

#### 本研究の主な成果：

参照論文 Kubota and Shirota では、対応するポアソン方程式のレゾナンスと呼ばれる特殊解を用いて弱極限が計算されているが、我々の問題では、ポアソン方程式の代わりに適当な条件を満たすヘルムホルツ方程式を考えれば良いことを明らかにした。更に、ヘルムホルツ方程式がレゾナンスを持つことを仮定すると、解の極限的な形を予想することができ、波動方程式の外部問題における極限振幅の原理の定式化することに成功した。これに加えて、障害物が球であり、波動方程式の解が球対称な場合にはヘルムホルツ方程式に対する境界値問題が、実際に、レゾナンスを持つことを導いた。

#### 本研究の位置づけとインパクト：

外部問題に対して極限振幅の原理を考察した例は、研究代表者が知る限り、皆無であり、この方面における新たな研究テーマを創出したと考えられる。

また、境界値の周波数に共鳴して境界付近に停留する波に着目し、その様な波をレゾナンスとして特徴付けたことは、光物理学における基礎研究とも位置づけられる。

#### 今後の展望：

残念ながら、研究期間内には、障害物が非捕捉的な場合の考察は十分に行えなかった。特に、障害物が二個の球である場合に、捕捉される波と周期的な境界値の相互作用を詳しく調べることは重要な研究課題と言える。実際、境界上に与えるデータを制御することにより捕捉された波の挙動をコントロールするメカニズムが解明されれば、様々な分野へ

の応用が期待される。

また、本研究では解の漸近挙動を対応する定常問題のレゾナンスによって特徴付ける段階に留まっているが、更にレゾナンスについての解析を深めることにより、領域の形状との関係性がより明確になると考えられる。これに関する理解が進めば、逆に解の漸近挙動から障害物の形状を同定するという逆問題へと発展することが期待できる。

今後は、このような興味深い研究テーマに引き続き取り組んでいきたい。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

1. H. Kubo and K. Kubota, Generalized wave operators for a system of nonlinear wave equations in three space dimensions, Hokkaido Math. J., 査読有, 2012, 掲載確定

2. S. Katayama and H. Kubo, The rate of convergence to the asymptotics for the wave equation in an exterior domain, Funkcial. Ekvac., 査読有, 53, 2010, 331-358

3. H. Kubo and M. Takaki, A remark on long range effect for a system of semilinear wave equation, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste, 査読有, 42 suppl. 2010, 111-123

[学会発表] (計5件)

1. 久保英夫, 空間2次元における非線型波動方程式に対する外部問題の大域可解性, 愛媛大解析セミナー, 2011年12月3日, 愛媛大学

2. H. Kubo, On the exterior problem for nonlinear wave equations, The 4th MSJ-SI international conference, "Nonlinear dynamics in partial differential equations", 2011年9月18日, 九州大学

3. H. Kubo, Lower bound of the lifespan of solutions to nonlinear elastic wave equations, RIMS研究集会「幾何学的偏微分方程式における保存則と正則性特異性の研究」, 2011年6月9日, 京都大学

4. H. Kubo, Lower bounds for the lifespan of solutions to nonlinear wave equations in elasticity, Nonlinear Wave and Dispersive equations, 2011年2月16日, 京都大学

5. H. Kubo, On the asymptotic behavior for elastic waves, The 8th Workshop on Linear and Nonlinear Waves, 2010年9月12日, 大阪大学

〔図書〕(計1件)

1. H. Kubo, 2012. Lower bounds for the lifespan of solutions to nonlinear wave equations in elasticity, *Progress in Mathematics*, Vol. 301, 189-214 (分担執筆), Springer

6. 研究組織

(1) 研究代表者

久保 英夫 (KUBO HIDEO)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号 : 50283346