

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2010～2013

課題番号：22684001

研究課題名(和文)高次 Chow 群と高次元類体論

研究課題名(英文)Higher Chow groups and higher dimensional class field theory

研究代表者

山崎 隆雄 (Takao, Yamazaki)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00312794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,700,000 円、(間接経費) 2,910,000 円

研究成果の概要(和文)：高次 Chow 群は数論幾何一般において重要な研究対象である。基礎体が数論的な体の場合、高次元類体論により高次 Chow 群が基本群やブラウアー群のような数論的な群と結びつくことがある。基礎体が局所体の場合、このような結びつきは射影的な非特異多様体に対して考察されていたが、本研究では射影的とは限らない非特異多様体へとこれらの理論を拡張した。また、モチーフの三角圏におけるテンソル積を染川 K 群で表示することに成功した (Bruno Kahn 氏との共同研究)。これは二つ以上の多様体の直積に対して高次 Chow 群を計算する新しい有力な方法を提供する。

研究成果の概要(英文)：Higher Chow groups of varieties are important objects in arithmetic geometry in general. When the base field is of arithmetic nature, higher Chow groups are known to be related with arithmetic objects such as the fundamental group and Brauer group. Over a local field, such relation has been studied for smooth projective varieties. We extended it to non-projective varieties. Besides, in a joint work with Bruno Kahn, we described the tensor product in the triangulated category of motives in terms of Somokawa K-groups, which provides us with a new method to compute the higher Chow groups of a product of varieties.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学 高次元類体論 高次 Chow 群 ブラウアー群 K-群 モチビックホモロジー モチーフ

1. 研究開始当初の背景

- (1) 多様体の高次 Chow 群は代数曲線論におけるピカル群や代数的整数論におけるイデアル類群の広範な一般化である。高次元類体論では、基礎体が数論的な体の場合にこの高次 Chow 群と数論的な群が結びつけられる。基礎体が有限体の場合、非特異かつ射影的な多様体に対して高次元類体論が 1980 年代に確立されていた(加藤・斎藤)が、2000 年ごろになって非特異だが射影的とは限らない多様体にまで拡張された(Schmidt-Spiess)。一方、基礎体が局所体の場合、この類似がアーベル基本群に対する理論(通常の高次元類体論)と、ブラウアー群に対する理論(いわゆる Brauer-Manin 双対の理論)の二つが考えられる。多様体为非特異かつ射影的な場合はやはり 1980 年代から研究が始まり、2005 年頃までにほぼ完成した(Bloch, 斎藤, Jannsen, Manin, 佐藤など)。
- (2) Voevodsky はモチーフの三角圏を構成し、その準同型群として高次 Chow 群を正しく解釈できることを示した。高次 Chow 群の定義は完全に幾何的なものであり、その計算は非常に困難であることが多い。それに比較すると、三角圏の準同型群は代数的な操作がしやすいため、様々な面で扱いやすくなる。例えば、二つ以上の多様体の直積に対する高次 Chow 群は、幾何的に扱おうとしてもきわめて困難であるが、Voevodsky の三角圏を用いるとテンソル積という代数的な操作で表示することはできる。ただし、Voevodsky の圏におけるテンソル積の定義はきわめて複雑であり、そのまま計算することはやはり困難である。一方、Voevodsky の構成とはまったく異なる原理に基づいて定義された「染川 K 群」という群によって、直積多様体の高次 Chow 群を表示できる場合があることが 1990 年から 2005 年頃までに様々なケースで観察されていた(加藤, 染川, Raskind, Spiess, Atkhar など)。

2. 研究の目的

「研究開始当初の背景」の欄に記したいきさつを踏まえ、次の二点を目標に研究を行った。

- (1) 基礎体が局所体の場合に、高次元類体論や Brauer-Manin 双対の理論を非特異だが完備とは限らない多様体にまで拡張する。
- (2) Voevodsky が構成したモチーフの三角圏におけるテンソル積と、染川 K 群の関係を明らかにする。また、それによって二つ以上の多様体の直積に対する高次 Chow 群より効果的に計算する方法を考察する。

3. 研究の方法

本課題は数学の研究であるから、研究の方法はもくもくと考え続けることが中心となるが、それに加えてもう一つ重要な点は、国内外の多くの研究者と交流し、議論を交わすことである。本課題においてはこのような議論を交わす場を設けるために、多くの研究集会を開催した。以下にそれをリストとして挙げる：

- (1) Workshop on reciprocity sheaves. 八ヶ岳自然文化園, 2013 年 7 月 28 日 ~ 8 月 1 日。
- (2) 2012 NCTS Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory. 台湾国立理論科学研究所, 2012 年 8 月 27 日 ~ 9 月 7 日。
- (3) Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives. 東北大学, 2012 年 1 月 23 日 ~ 25 日。
- (4) Workshop on arithmetic geometry 2011. 沖縄尚学, 2011 年 10 月 10 日 ~ 13 日。
- (5) Integrable systems in Suzuka. 鈴鹿医療科学大学, 2011 年 2 月 17 日 ~ 18 日。
- (6) p-進佐藤理論と数論幾何。東北大学, 2010 年 9 月 28 日 ~ 10 月 1 日。
- (7) 数論幾何学ワークショップ 2010. 沖縄尚学, 2010 年 8 月 2 日 ~ 7 日。
- また、以下の研究集会においてもプログラム委員として開催に協力した。
- (1) East Asia Number Theory Conference 2014. 九州大学西新プラザ, 2014 年 1 月 20 ~ 24 日。
- (2) 第 56 回代数学シンポジウム。岡山大学, 2011 年 8 月 8 日 ~ 11 日。

4. 研究成果

- (1) 局所体上の多様体に対する高次元類体論や Brauer-Manin 双対の理論を、非特異だが完備とは限らない多様体に拡張した。基礎体が有限体の場合、類似の結果は Schmidt-Spiess により得られていた。この拡張においては、Chow 群を Suslin ホモロジーに置き換えるという点が重要であった。この結果を参考にして、基礎体が局所体の場合も Chow 群や高次 Chow 群を Suslin ホモロジーや、より一般に(適切な重さの)モチビク・ホモロジーで置き換えることにより、この拡張が達成された。この結果は論文 (3) として出版された。
- (2) Voevodsky はホモトピー不変性と呼ばれる性質を基礎としてモチーフの三角圏を構成した。その圏におけるテンソル積はきわめて複雑な定義を持ち、計算が非常に困難である。一方、加藤はヴェイユ相互律に基づいたまったく別の方法で、モチーフのテンソル積にあたる群を独立に定義していた。本研究では、Bruno Kahn

氏との共同で、両者の定義が一致することを証明した。Voevodsky の圏における準同型群は高次 Chow 群など代数的サイクルで定義される群を正しく計算するため、この結果は直積多様体の代数的サイクルのなす群（高次 Chow 群やモチビク・ホモロジーなど）を計算するという応用を持つ。この結果は論文(2)として出版された。また、この結果のサーベイである(4)も出版された。

- (3) 宮坂宥憲氏と共同で、 p -進ソリトン理論について研究した。ある種の超楕円曲線のヤコビ多様体において、テータ因子上にある素数位数の点の分布について研究した。この結果は論文(1)として出版された。

なお、(2) で述べた結果は、ホモトピー不変性を仮定せず、それよりも弱いヴェイユ相互律に基づいてモチーフ理論が構成できる可能性を強く示唆する。この着眼点に基づき、Bruno Kahn 氏および齋藤秀司氏と共同研究を進めた。論文は投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計5件)

- (1) Yuken Miyasaka and Takao Yamazaki, Torsion points on hyperelliptic Jacobians via Anderson's p -adic soliton theory. *Tokyo Journal of Mathematics*, 36 (2013), 387-403. 査読有り.
- (2) Bruno Kahn and Takao Yamazaki, Voevodsky's motives and Weil reciprocity. *Duke Mathematical Journal*, 162, (2013), 2751-2796. 査読有り.
- (3) Takao Yamazaki, Brauer-Manin pairing, class field theory and motivic homology. *Nagoya Mathematical Journal*, 210, 29-58 (2013). 査読有り.
- (4) 山崎隆雄, ヴォドスキーのモチーフとヴェイユ相互律. 数理解析研究所講究録別冊 44 (2013), 165--181. 査読有り.
- (5) Pol Vanhaecke, Rei Inoue and Takao Yamazaki, Singular fiber of the Mumford system and rational solutions to the KdV hierarchy. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 63, 508-532 (2010). 査読有り.

〔学会発表〕(計30件)

- (1) Takao Yamazaki, Voevodsky's motives and Weil reciprocity. 2014 NCTS Mini-Workshop on Number Theory, NCTS, 台湾国立理論科学研究所. 2014年3月12日.
- (2) Takao Yamazaki, p -adic soliton theory and arithmetic geometry. *Arithmetic and Algebraic Geometry 2014*, 東京大学数理科学研究科, 2014年1月30日.
- (3) Takao Yamazaki, p -adic soliton theory and torsion points on Jacobian varieties. *East Asia Number Theory Conference 2014*, 九州大学西新プラザ, 2014年1月24日.
- (4) Takao Yamazaki, Towards non-homotopy invariant motive theory. 談話会, 京都大学, 2014年1月8日.
- (5) Takao Yamazaki, p -adic soliton theory and torsion points on Jacobian varieties. 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2013年12月11日.
- (6) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves: towards non-homotopy invariant motive theory. *Motives in Tokyo, 2013*, 東京大学数理科学研究科, 2013年11月27日.
- (7) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves: towards non-homotopy invariant motive theory. *Arithmetic, differential and geometry*, 東北大学, 2013年10月31日.
- (8) Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p -adic soliton theory. *Seminaire Groupes, Algebre et Geometrie*, フランス・ポアティエ大学, 2013年9月19日.
- (9) Takao Yamazaki, Reciprocity sheaves. *Workshop on reciprocity sheaves*, 八ヶ岳自然文化園, 2013年7月31日.
- (10) Takao Yamazaki, p -adic soliton theory and arithmetic geometry. 談話会, 北海道大学, 2013年5月30日.

- (11) Takao Yamazaki, Algebraic cycles on a product of curves over a p-adic field. Seminaire autour des cycles algebriques, フランス・ジュシュー数学研究所, 2012年11月21日.
- (12) Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p-adic soliton theory. Seminaire de theorie des nombres, フランス・ジュシュー数学研究所, 2012年11月19日.
- (13) Takao Yamazaki, Voevodsky's category of motives and Milnor K-groups attached to semi-abelian varieties. Number Theory Day in Keio, 慶應大学, 2012年9月13日.
- (14) Takao Yamazaki, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p-adic soliton theory. Tohoku-Fudan Workshop, 東北大学, 2012年5月17日.
- (15) Takao Yamazaki, Somekawa's K-groups and Voevodsky's Hom groups. Arithmetic geometry seminar, 北海道大学, 2012年4月19~20日.
- (16) Takao Yamazaki, On Theta divisor, Jacobian, KdV and KP equations. TIMS Seminar on Arithmetic Geometry, 国立台湾大学, 2012年3月14日.
- (17) Takao Yamazaki, Torsion points on the quotient of a Fermat Jacobian via Anderson's p-adic soliton theory, I. Mini-workshop on number theory, 台湾国立理論科学研究所, 2012年3月7日.
- (18) Takao Yamazaki, p-adic Sato theory and arithmetic geometry. 香川セミナー, 香川大学, 2012年2月18日.
- (19) Takao Yamazaki, p-adic Sato theory and arithmetic geometry. Algebra Seminar, 広島大学, 2011年12月16日.
- (20) Takao Yamazaki, Voevodsky's motif and Weil reciprocity. International Workshop on motives in Tokyo 2011, 東京大学数理科学研究科, 2011年12月12日.
- (21) Takao Yamazaki, Voevodsky's motif and Weil reciprocity. 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2011年11月29日.
- (22) Takao Yamazaki, Torsion on theta divisors of hyperelliptic Jacobians and p-adic tau functions. Algebra seminar, 慶應大学, 2011年11月14日.
- (23) Takao Yamazaki, Torsion on theta divisors of hyperelliptic Jacobians and p-adic tau functions. Geometrie arithmetique et motivique, Centre International de Rencontres Mathematique(フランス), 2011年9月22日.
- (24) Takao Yamazaki, Class field theory for open varieties over local fields. 談話会, 千葉大学, 2011年6月14日.
- (25) Takao Yamazaki, Class field theory for open varieties over local fields. NCTS number theory seminar, 台湾国立理論科学研究所, 2011年4月19日.
- (26) Takao Yamazaki, Class field theory for open varieties over local fields. International workshop on motives in Tokyo, part 6. 東京大学数理科学研究科, 2010年12月16日.
- (27) Takao Yamazaki, Krichever correspondence / p-adic tau function and its application to arithmetic geometry. Workshop on p-adic Sato theory and arithmetic geometry, 東北大学, 2010年9月30日.
- (28) Takao Yamazaki, Brauer groups and 0-cycles on open varieties over a local field. 日本数学会代数学分科会特別講演, 名古屋大学多元数理研究科, 2010年9月24日.
- (29) Takao Yamazaki, Brauer-Manin pairing for open varieties over local fields. Academia Sinica algebra seminar(台湾), 2010年7月6日.

(30) Takao Yamazaki, Brauer groups and 0-cycles on varieties over a local field (survey). 代数セミナー, 東北大学, 2010年5月20日.

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山崎 隆雄 (Takao Yamazaki)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00312794

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし