

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2010～2013

課題番号：22684002

研究課題名(和文) 三角圏の安定性条件と数え上げ不変量

研究課題名(英文) Stability conditions on triangulated categories and counting invariants

研究代表者

戸田 幸伸 (Toda, Yukinobu)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・特任准教授

研究者番号：20503882

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,800,000円、(間接経費) 2,340,000円

研究成果の概要(和文)：3次元カラビ・ヤウ多様体は超弦理論における余剰次元に出現すると考えられており、数学物理双方にとって重要な空間である。この空間上の曲線を数え上げるDonaldson-Thomas (DT) 不変量の生成関数は、超弦理論に端を発する種々の性質を持つと予想されている。連接層の導来圏における半安定対象を数え上げる不変量を構成し、これを用いることでDT不変量に関する種々の予想に応用した。

研究成果の概要(英文)：A 3-dimensional Calabi-Yau manifold is expected to appear as an extra dimension in string theory, and an important space both in mathematics and physics. The Donaldson-Thomas (DT) invariants counting curves on that space are conjectured to satisfy several properties originating with string theory. I constructed invariants counting semistable objects in derived categories of coherent sheaves, and applied them for several conjectures on DT invariants.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：連接層の導来圏 安定性条件 Donaldson-Thomas不変量

1. 研究開始当初の背景 代数多様体上の接続層の導来圏は、代数幾何学とシンプレクティック幾何学、表現論、非可換代数論との間の対称性を実現すると考えられており、現在活発に研究されている。2002年に Bridgeland は導来圏の安定性条件の概念を導入し、上記の対称性が安定性条件を用いて統一的に理解できると考えられるようになった。しかし、3次元射影的カラビ・ヤウ多様体上に安定性条件が存在するか否かが未解決であり、この場合の安定性条件の研究は滞ったままであった。一方、Thomas は1998年に3次元カラビ・ヤウ多様体上の安定層を数える不変量 (DT 不変量) を導入した。特に階数が1の接続層を数える DT 不変量は曲線を数え上げており、この場合の DT 不変量が Gromov-Witten 不変量と等価であると Maulik-Nekrasov-Okounkov-Pandharipande (MNOP) により予想された。私は2009年度までの研究により、安定性条件の概念の改変版である弱安定性条件の概念を導入した。弱安定性条件は安定性条件より構成が容易であり、弱安定性条件の空間における壁越え理論を適用することで階数が1の DT 不変量に関する重要な結果を得た。例えば Pandharipande-Thomas による DT 不変量と安定対不変量間の等価性予想、MNOP による DT 不変量の生成関数の有理予想のオイラー数版が示された。研究開始当初、それまでの弱安定性条件を用いたアプローチを更に様々な問題に適用する事、また本来の Bridgeland 安定性条件を構成して DT 不変量の研究に更なる応用を与える事が求められていた。また Bridgeland 安定性条件と双有理幾何学、行列因子化など、安定性条件の様々な側面の理解も求められていた。

2. 研究の目的 3次元カラビ・ヤウ多様体上の DT 不変量の生成関数は、超弦理論に端を発する種々の性質を持つと予想されており、これらの解決に導来圏の(弱)安定性条件を用いて寄与することが目的である。3次元射影的代数多様体上の Bridgeland による本来の安定性条件の構成問題も未解決であるため、この問題を解決することで安定性条件の理論に進展を与える。また、安定性条件を用いて極小モデルプログラムをモジュライ論的解釈する事、行列因子化を数える DT 型の不変量を導入することも目的である。

3. 研究の方法 2009年までの研究で進展した弱安定性条件の壁越え理論を用いて、DT 不変量の研究に応用を与える。また、3次元射影的代数多様体上の本来の Bridgeland 安定性条件の構成には、代数曲面の場合の構成を参考にす。超弦理論のアイデアも参考に研究を進める。

4. 研究成果 導来圏の弱安定性条件の壁越

え理論を用いて、局所 K3 曲面上の曲線を数える DT 型不変量に関する重要な公式を得た。これは、局所 K3 曲面上の曲線を数える DT 型不変量の生成関数が因数分解され、各因数が局所 K3 曲面上の半安定層の数え上げ不変量に対応するという公式である。後者の不変量は K3 曲面の点の Hilbert 概型のオイラー数を用いて記述できると予想され、特にある種の保型性を持つと期待される。これが正しいければ、局所 K3 曲面上の曲線を数える DT 不変量の生成関数にある種の保型性が存在することになるが、これは超弦理論の文脈で Katz-Klemm-Vafa (KKV) により予想されていた性質である。この結果は、KKV 予想に重要な寄与を与えたといえる。

Bayer 氏、Macri 氏との共同研究により、3次元射影的代数多様体上の Bridgeland 安定性条件を与える候補となるデータを構成した。我々の方法は接続層の圏の2重傾斜を用いるというものであり、代数曲面の場合の構成の高次元化である。また我々が構成したデータが実際に Bridgeland 安定性条件を与える事と、接続層のある種の2項複体の3次 Chern 数を評価する Bogomolov-Gieseker (BG) 型不等式予想が等価であることを示した。この不等式予想は、それ自体興味深い研究対象であると考えられる。更に我々の不等式予想を仮定することで3次元射影的代数多様体上の藤田予想が従う事を Bayer 氏、Bertram 氏、Macri 氏らとの共同研究で示した。

前述の不等式予想は、DT 型不変量の研究に応用があることも明らかになった。Denef-Moore は超弦理論の枠組みで3次元カラビ・ヤウ多様体上の2次元捩れ層を数える DT 不変量と曲線を数える DT 不変量間に興味深い関係式が存在することを予想したが、彼らの予想が我々の BG 型不等式予想から従うことが明らかになった。これは研究当初は予期していなかった結果であり、BG 型不等式予想の重要性が再確認された。

代数曲面や3次元射影的代数多様体の端射線収縮に付随する t-構造を詳細に調べ、結果としてこれらの双有理変換が Bridgeland 半安定対象のモジュライ空間の壁越えで得られることを証明した。また、代数曲面に関しては極小モデルプログラムに出現する全ての代数曲面が元の代数曲面上の Bridgeland 安定対象のモジュライ空間として実現されることを示した。

同次多項式を与えると次数付き行列因子化のなす三角圏が定義されるが、この三角圏上にある種の特異な対称性を持つ Gepner 型安定性条件の概念を提唱した。実際にこのような安定性条件が存在するか否かは予想の段階であるが、これが示されると行列因子化を数える DT 型不変量を構成できることになり、数学的にも物理的にも興味深いと考えられる。

Denef-Moore 予想によって3次元カラビ・ヤウ多様体上の2次元捩れ層を数える DT 不変量の研究は重要であるが、このような不変量

の生成関数は(ほぼ)ヤコビ形式になると期待されている。これは Vafa-Witten による S-双対性予想の3次元版である。この3次元版 S-双対性予想がフロップで保たれることを示し、応用として A 型曲面特異点上の点の Hilbert 概型のオイラー数の生成関数が保型形式になることを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

1. Y. Toda, Bogomolov-Gieseker-type inequality and counting invariants. *J. Topol.* 6 (2013), no. 1, 217-250.
2. Y. Toda, Curve counting theories via stable objects II: DT/ncDT flop formula. *J. Reine Angew. Math.* 675 (2013), 1-51.
3. Y. Toda, Introduction and open problems of Donaldson-Thomas theory. *Derived categories in algebraic geometry*, 289-318, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2012.
4. Y. Toda, Stable pairs on local K3 surfaces. *J. Differential Geom.* 92 (2012), no. 2, 285-371.
5. Y. Toda, Stability conditions and curve counting invariants on Calabi-Yau 3-folds. *Kyoto J. Math.* 52 (2012), no. 1, 1-50.
6. Y. Toda, Curve counting invariants around the conifold point. *J. Differential Geom.* 89 (2011), no. 1, 133-184.
7. Y. Toda, Moduli spaces of stable quotients and wall-crossing phenomena. *Compos. Math.* 147 (2011), no. 5, 1479-1518.

8. Y. Toda, Generating functions of stable pair invariants via wall-crossings in derived categories. *New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry* (RIMS, Kyoto, 2008), 389-434, *Adv. Stud. Pure Math.*, 59, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

9. Y. Toda, Curve counting theories via stable objects I. DT/PT correspondence. *J. Amer. Math. Soc.* 23 (2010), no. 4, 1119-1157.

10. Y. Toda, Derived categories of coherent sheaves on algebraic varieties. *Triangulated categories*, 408-451, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 375, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

11. Y. Toda, On a computation of rank two Donaldson-Thomas invariants. *Commun. Number Theory Phys.* 4 (2010), no. 1, 49-102.

12. Y. Toda and H. Uehara, Tilting generators via ample line bundles. *Adv. Math.* 223 (2010), no. 1, 1-29.

[学会発表](計 18 件)

1. 戸田 幸伸
``Gepner type stability conditions on graded matrix factorizations'', Pacific Rim conference, (招待講演)
札幌コンベンションセンター, 2013年7月5日.

2. 戸田 幸伸
``Gepner type stability conditions on graded matrix factorizations'', *Birational Geometry and Geometric Invariant Theory*, (招待講演)
ウィーン大学 ESI, オーストリア, 2013年5

月 23 日.

3. 戸田 幸伸

``Introduction to Donaldson-Thomas theory, Bogomolov-Gieseker type inequality and DT invariants, Gepner type stability conditions on graded matrix factorizations'', Graduate Student Workshop on Moduli Spaces and Bridgeland Stability (招待講演, 3連続講演) イリノイ大学シカゴ校, アメリカ, 2013年3月23-25日.

4. 戸田 幸伸

``Gepner type stability conditions on triangulated categories'', Higher Dimensional Algebraic Geometry (in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday), (招待講演) 東京大学, 2013年1月7日.

5. 戸田 幸伸

``Stability condition at the Gepner point'', Homological projective duality and quantum gauge theory, (招待講演) 東京大学 Kavli IPMU, 2012年11月14日.

6. 戸田 幸伸

``Stability conditions and Donaldson-Thomas type invariants on Calabi-Yau 3-folds'', 幾何学賞受賞記念講演(招待講演), 九州大学, 2012年9月19日.

7. 戸田 幸伸

``Stability conditions and birational geometry'', 日韓共同会議(招待講演), 九州大学医学部百年講堂, 2012年9月16日.

8. 戸田 幸伸

``Bogomolov-Gieseker type inequality and OSV Conjecture I, II'', Relation to string theory to gauge theories and moduli problems of branes(招待講演), ステクロフ数学研究所, ロシア, 2012年9月13日.

9. 戸田 幸伸

``Bogomolov-Gieseker type inequality and counting invariants'', The Conference of mirror symmetry and related topics(招待講演), 昆明大学, 中国, 2012年8月24日.

10. 戸田 幸伸

``Stability conditions and birational geometry of projective surfaces'', Workshop on Moduli and Birational geometry(招待講演), 釜山, 韓国, 2012年7月10日.

11. 戸田 幸伸

``Bogomolov-Gieseker type inequality and counting invariants'', Arithmetic and Algebraic geometry 2012(招待講演), 東京大学, 2012年2月16日.

12. 戸田 幸伸

``Multiple cover formula of generalized DT invariants'', Derived categories in Algebraic Geometry(招待講演), ステクロフ数学研究所, ロシア, 2011年9月5日.

13. 戸田 幸伸

``Introduction of Bridgeland stability conditions and construction of Bridgeland stability on 3-folds'', KIAS summer school on derived categories(招待講演, 4連続講演), Alpensia Resort, 韓国, 2011年7月26-29日.

14. 戸田 幸伸

``Parabolic stable pairs on Calabi-Yau 3-folds'', Double Affine Hecke Algebras, the Langlands Program, Affine flag varieties, Conformal Field Theory, Super Yang Mills Theory(招待講演), Luminy, フランス, 2011年6月29日.

15. 戸田 幸伸

``Curve counting invariants on Calabi-Yau 3-folds'', Moduli spaces, Spitalfields Day(招待講演), ニュートン数理科学研究所, イギリス, 2011年5月5日.

16. 戸田 幸伸

``Stable pairs on local K3 surfaces'', Derived categories(招待講演), ニュートン数理科学研究所, イギリス, 2011年4月12日.

17. 戸田 幸伸

``Stability conditions and Bogomolov-Gieseker type inequalities I'', Derived categories 2011 Tokyo(招待講演, 主催者), 東京大学, 2011年1月24日.

18. 戸田 幸伸

``Curve counting invariants via stable objects, I, II, III'', Derived categories of Algebro-Geometric Origin and Integrable Systems(招待講演, 3連続講演), IAS, イスラエル, 2010年12月19-24日.

[図書](計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者
戸田 幸伸（Toda Yukinobu）
東京大学
カブリ数物連携宇宙研究機構
特任准教授

研究者番号：20503882

(2)研究分担者
（ ）

研究者番号：

(3)連携研究者
（ ）

研究者番号：