

機関番号：14301

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2010～2013

課題番号：22684003

研究課題名(和文) 群作用の変形理論に関する多角的研究

研究課題名(英文) Study of deformation of group actions from various viewpoints

研究代表者

浅岡 正幸 (Asaoka, Masayuki)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：10314832

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,700,000円、(間接経費) 2,310,000円

研究成果の概要(和文)：群作用の変形問題について、幾何学的視点や力学系的視点を中心とした様々な視点からの研究を行った。幾何学的な観点からの研究の成果としては、高次元球面上の共形的な作用でその変形はすべてまた共形的なものとなるような例を構成した。また、その結果の証明を応用する事で高次元トーラスの上のある種の幾何構造を保つ群作用の変形もすべて同じタイプの幾何構造を保つことも証明できた。力学系的視点からの研究としては、群作用の剛性についてこれまでに知られている結果のいくつかを作用の持つある種の拡大性を通して再解釈することができた。

研究成果の概要(英文)：We studied deformation of group actions from various viewpoints, mainly from geometric and dynamical view points. From geometric side, we proved that a natural conformal action on the sphere admits only conformal deformation. We also applied the method used in this result to another action on the torus. We proved an action on the torus which preserves a geometric structure admits only deformation which preserves the same type of geometric structure. From dynamical side, we reinterpreted several known rigidity results on group actions from the viewpoint of expansion property of the actions.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：群作用 力学系

1. 研究開始当初の背景

群が空間にどのように作用するか、という問題は、空間の持つ対称性の問題の数学的な定式化であり古くから多くの研究がなされてきた。1990年代に入り、いくつかの群作用が一切の変形を持たないという強い剛性を持つことが証明された。その後、剛性を持つ群作用や変形を持つもののすべての変形が幾何構造を保つようなものなど、いろいろな例が見つかったが、それらを統一的に理解する観点は見つかっていなかった。また、剛性を持つことが証明された群作用は、実階数が2以上の半単純リー群に関わるものがほとんどであり、 $SO(n,1)$ などの実階数1リー群に関わる自然な群作用についてはその剛性についてはよくわかっていなかった。

2. 研究の目的

本研究では、剛性やそれに類する性質を持つ群作用を幾何学的、力学系的な観点を中心に様々な角度から見ることで群作用のもつ剛性の起源を探り、統一的な視点を打ち立てるとともに、その統一的な視点から新しいタイプの剛性を持つ作用の発見を目指した。幾何学的な観点からは、どのような場合に変形が幾何構造を保つのか、そしてそのメカニズムは何によっているのかの理解を目標とした。力学系的な観点からは、群作用の力学系としてのどのような性質が剛性を生み出すのかの理解を目標とした。またこれらと平行して、群作用の変形に関する一般的な枠組みである変形理論的な観点について、多くの場合非常に困難である具体的な計算を行うことで、一般的な枠組みがどのような状況では用いる事が出来るのかをより明確にすることも目指した。

3. 研究の方法

群作用の持つ剛性の起源を探るためにはすでに知られている結果の再検討と、新しい例の構成とその理解が必要不可欠である。そこで、まずこの2点に研究の焦点をしばった。これまでに知られている結果の再検討については、それらの結果における共通点を抽出して、これまでの証明とは異なる新しい観点からの証明の可能性を探った。新しい例の構成については、これまでに知られている例のほとんどは、実階数が2以上の半単純リー群に関わるアノソフ性と呼ばれる力学系的な性質を持つものであったので、実階数1のリー群に関わる群作用が剛性を持つかどうかを調べるとともに、可解群の作用でアノソフ性を持たないものの中から新しい例を構成することを目指した。

また、変形理論の観点からの理解を行うために、変形空間が知られている例に対して、その無限小変形の空間の計算を行った。また力学系的な視点からの研究を支えるために、種々の力学系の位相的、測度論的な研究も行

った。

研究を行うにあたっては、関連分野の研究者との情報交換が必須であったため、国内外の研究集会に参加し、そこで成果報告をするるとともに多くの議論を行い、有益な情報を得る事が出来た。

4. 研究成果

なんらかの剛性を持つ群作用の構成については、一般次元球面の上のある可解群の共形的な作用について、その変形がまたすべて共形的なものになることが証明できた。これまでに知られている剛性を持つ作用のほとんどは空間全体でなんらかの双曲性を持つ、いわゆるアノソフ作用であるか、1次元多様体という特殊な空間の上の作用であった。この結果における例は高次元空間上の群作用であり、作用に含まれる個々の写像は単純な振舞いをするなど、これまで知られていたものとは異なるものであった。

また、この結果の証明に用いた手法の応用として、一般次元トーラス上のある幾何構造を保つ作用についてもやはり同様なことがなりたつことを証明できた。これらの結果の証明に用いた方法は、無限次元である群作用の変形複体を群の持つある種の拡大性を通じて有限次元複体に帰着させ、問題を初等的な線形代数の問題にしてしまうものであり、本研究で見つけた例以外でも多くの応用が期待できるものである。

群の持つ拡大性と剛性を結びつけるという視点を更に押し進めることで、剛性をもつことがこれまでに知られていいたいくつかの群について、その剛性定理の証明を群の持つ拡大性から再解釈することにも成功した。この手法もより一般的な状況で用いることが出来るため、今後多くの群作用に対しての応用が期待できる。

本研究の目標の一つであった $SO(n,1)$ に関わるある群作用の無限小変形の問題については、 $n=2$ の場合については無限小変形全体のなる空間の次元を完全に計算して、それが実際の変形空間の次元と一致することを確認できたが、 $n>2$ の場合には残念ながら本研究の終了までに計算を完成させることができず、今後の課題として残った。

これらと平行して力学系の位相的、測度論的な性質の研究を行い、その副産物として、ある種の力学系的に解釈できる系の周期点にあたるものの増大度の評価や、測度論的に興味深い性質をもつ系の構成などが得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

1. M.Asaoka and K.Yamamoto, On the large deviation rates on non-entropy-approachable measure, Disc. And Conti. Dyn. Sys. vol. 33

(2013), 4401-4410. (査読あり)

2. M.Asaoka, Rigidity of certain solvable actions on the sphere. *Geom. and Topology*, 16 (2012), no. 3, 1835-1857. (査読あり)

3. M. Asaoka, E.Dufraine, and T.Noda, Homotopy classes of total foliations and bi-contact structures on three-manifolds. *Comm. Math. Helv.*, 87 (2012), no. 2, 271-302. (査読あり)

4. M.Asaoka, Non-homogeneous locally free actions of the affine group. *Ann. of Math.*, 175 (2012), nnno.1, 1-21. (査読あり)

5. M.Asaoka, T. Fukaya, and M. Tsukamoto, Remark on dynamical morse inequality. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 87 (2011) no. 9, 178-182. (査読あり)

[学会発表](計 16 件)

1. M.Asaoka A cocycle rigidity lemma for Baumslag-Solitar actions and its applications. *Geometric Geometry and Foliations 2013*, 東京大学大学院数理解析研究所, 2013 年 9 月 9 日, (招待講演)

2. M.Asaoka A cocycle rigidity lemma for Baumslag-Solitar actions and its applications. *Geometric Group Theory-Kyoto 2013*, 京都大学大学院理学研究科, 2013 年 7 月 19 日 (招待講演)

3. M.Asaoka, Growth of critical points in one-dimensional lattice systems I. *Dynamics, Entropy and Semialgebraic Sets*, 京都大学大学院理学研究科, 2013 年 7 月 11 日. (招待講演)

4. 浅岡正幸, アノソフ力学系と群作用の剛性問題. *日本数学会年会*, 2013 年 3 月 21 日. (招待講演)

5. M.Asaoka, Growth of critical points in one-dimensional lattice systems, *Discrete geometry and dynamical systems*, 京都大学大学院理学研究科, 2013 年 1 月 24 日. (招待講演)

6. M. Asaoka, Growth of critical points in one-dimensional lattice systems. *力学系とその周辺分野*, 京都大学 数理解析研究所, 2012 年 7 月 11 日. (招待講演)

7. M. Asaoka, Rigidity of certain solvable actions on the sphere, *Foliations 2012*, University of Lodz, Lodz (Poland), 2012 年 6 月 28 日. (招待講演)

8. M.Asaoka, Local rigidity of homogeneous

actions of parabolic subgroups of rank-one Lie groups *Anosov systems*, CIRM Luminy, Marseille (France), 2012 年 6 月 19 日. (招待講演)

9. M.Asaoka, Rigidity of an abelian-by-cyclic action on the n-sphere, *Geometric group theory and K-theory (RIMS International Camp on Discrete geometry)*, 鳥羽シーサイドホテル, 鳥羽市, 2012 年 6 月 14 日. (招待講演)

10. M. Asaoka, Rigidity of certain solvable actions on the sphere, *ICTP-ESF School and Conference in Dynamical Systems*, ICTP, Trieste (Italy), 2012 年 5 月 28 日. (招待講演)

11. M.Asaoka, Weak form of local rigidity of certain solvable actions, *力学系とトポロジーのフロンティア (Frontiers in Dynamical systems and Topology)*, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 11 月 22 日.

12. M.Asaoka, Local rigidity of certain solvable actions, *多様体の平面場と微分同相群 2011 (Plane Fields on Manifolds and Diffeomorphisms Groups 2011)*, 東京大学玉原セミナーハウス, 2011 年 11 月 2 日.

13. 浅岡正幸, 滑らかな群作用の剛性と変形, *第 58 回幾何学シンポジウム*, 山口大学吉田キャンパス, 2011 年 8 月 28 日. (招待講演)

14. M.Asaoka, Rigidity of certain solvable group action on the 2-sphere, *Beyond Uniform Hyperbolicity*, CIRM (Marseille, France), 2011 年 6 月 9 日. (招待講演)

15. M.Asaoka, Parameter rigidity and leafwise cohomology. *Geometry and Analysis*, 京都大学大学院理学研究科, 2011 年 3 月 9 日. (招待講演)

16. M. Asaoka, Rigidity and Flexibility of group actions. *Various Aspects of Dynamical Systems – ICM 2010 Satellite Conference*, The Maharaja Sayajirao University of Baroda (Vadodara, India), 2010 年 9 月 1 日. (招待講演)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織
(1) 研究代表者

浅岡 正幸 (Masayuki Asaoka)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10314832

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし