

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 19 日現在

機関番号：35010

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2011

課題番号：22700018

研究課題名（和文） グラフ同型性判定問題の計算量の解析および効率的なアルゴリズムの提案

研究課題名（英文） Complexity and Algorithms for the Graph Isomorphism Problem

研究代表者

名古屋 孝幸（NAGOYA TAKAYUKI）

鳥取環境大学・環境情報学部・講師

研究者番号：90349796

研究成果の概要（和文）：

クリークサイズを定数に制限した弦グラフに対しては、グラフ同型性判定問題を拡張した制約付きグラフ同型性判定問題が多項式時間で解けることを示した。また、同様にグラフ同型性判定問題を拡張した Prefix Set of GI に対して多項式時間アルゴリズムを設計し、既知のアルゴリズムの時間量を改善した。グラフ同型性判定問題の応用として、静的文字画像から筆記運動を抽出するためのアルゴリズムの設計を行った。このアルゴリズムは、部分グラフ同型性判定を利用してダブルトレース等の構造を解析することで、組合せ的爆発を起こさずに筆順を復元できる。さらに、確率的タブーサーチを用いたより実用的なアルゴリズムの設計も行った。

研究成果の概要（英文）：

In this study, we have shown that, for chordal graphs with bounded clique size, the graph isomorphism with restriction, an extension of the graph isomorphism problem, is decidable in polynomial-time. For the same class of graphs, we have designed a faster algorithm to solve the prefix set of GI. We have also developed a linear time algorithm to recover stroke order from static handwritten image by using the subgraph isomorphism problem. A tabu-search based algorithm for the problem has also developed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：グラフ同型性判定問題・グラフ自己同型性判定問題・計算複雑さ・アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

グラフ同型性判定問題（GI）は、与えられた2つのグラフ G と H の構造が等しいか否か、すなわち G から H への同型写像が存在するか否かを問う問題である。 G の頂点集合から H の頂点集合への全単射 f が同型写像

であるとは、 G の任意の2点 u, v に対して u と v の間に辺があるとき、かつそのときに限り $f(u)$ と $f(v)$ の間にも辺があるときをいう。特に G から G への同型写像は G 上の自己同型写像といい、与えられたグラフに非自明な自己同型写像が存在するか否かを問う問題

をグラフ自己同型性判定問題 (GA) という。

GI はグラフに関する問題としては非常に基本的なものであることから、この問題が効率的に解けるか否かは応用面からも重要である。それゆえ、この問題を解くための効率的なアルゴリズムの研究が盛んになされてきたが、未だ多項式時間アルゴリズムは知られていない。また、この問題の性質には不明な点が多く、NP 完全であるか否かも分かっていない。明らかにされている GI の性質には、多くの NP 完全問題が持たないと思われる性質があり、このことは GI が NP 完全とはならないであろうとの予想の根拠となっている。したがって、GI は NPI の候補と考えられており、P vs NP 問題との関連から理論的にも重要な問題である。

GA は GI によく似た問題であり、GI と同様、NPI の候補である。しかしながら、これらの問題が多項式時間等価であるか否かはよく知られた未解決問題である。GA から GI への多項式時間 many-one 還元は知られているが、GI から GA への多項式時間還元は知られていない。また、GI は polynomial-time AND function を持つことは知られているが、GA がそのような性質を持つか否かは知られていない。このように、GI と GA は異なる性質を持つ可能性があるが、これらの計算複雑さの違いに着目した研究成果は少ない。GI や GA に関連した問題は多数あるが、それらの問題に対しては GA と多項式時間等価か？ GI と多項式時間等価か？といった多項式時間等価性に関する研究がほとんどである。それゆえ、GI と GA の間の性質や計算構造の違いは興味深い問題である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、(1)GI や GA に対する既知のアルゴリズムの改善および関連する問題への拡張、(2)GI と GA の間の性質や計算構造の違いの調査、および(3)実際的な問題への GI や GA の応用を与えることである。

(1) GI や GA に対する既知のアルゴリズムの改善および関連する問題への拡張

様々なグラフクラスに対して、GI や GA を解くための多項式時間アルゴリズムが設計されている。たとえば、クリークサイズを制限した弦グラフに対しては、GI が効率的に解けることが知られている(Nagoya, IEICE Trans. Inf. & Syst., 2002)。クリークサイズを制限しない弦グラフに対する GI は GI 完全であることが知られており、この結果は、弦グラフのクリークサイズを制限することで GI が効率的に解けることを示している。本研究では、このアルゴリズムの計算量の改善を試みる。また、GI や GA に関連する他の問題に対する効率的なアルゴリズムの設計も検

討する。たとえば、制約付きグラフ同型性判定問題は GI の自然な拡張であり、NP 完全となることが知られている。GI を解くためのアルゴリズムを拡張することで、制約付きグラフ同型性判定問題のようなより一般化された問題に対する効率的なアルゴリズムも検討する。

(2) GI と GA の間の性質や計算構造の違いの調査

既に述べたように、GI と GA は異なる性質や計算構造を持つ可能性がある。著者は、グラフ自己同型写像の一部を求める問題と GA の計算量の等価性を示したが、この結果は、解の一部を求める問題に関しては、GA と GI が異なる性質を持つことを示唆している。本研究では、この結果を発展させることで、GA と GI の性質の違いを示す。

(3) 実際的な問題への GI や GA の応用

グラフ構造で表現できる対象に対して、GI や GA の応用を与える。たとえば、手書き文字画像を認識するために、文字の構造をグラフとして表現し、その構造を解析する手法が数多く提案されている。本研究では、部分グラフ同型性判定問題を利用することで、静的文字画像から得られるグラフの構造を解析し、それをを用いて筆順を復元するアルゴリズムを設計する。

3. 研究の方法

以下の 4 つのテーマで研究を進める。

(1)PrefixGI に対するアルゴリズムの改善

著者は、クリークサイズを制限した弦グラフに対しては、GI が多項式時間で解けることを証明したが、その証明の過程でより一般的な問題に対するアルゴリズムを示した。具体的には、2 つのグラフの頂点集合の間の部分写像が与えられたとき、それを拡張する同型写像が存在するか否かを問う問題を解くためのアルゴリズムを設計した。この問題は PrefixGI と呼ばれ、GI と多項式時間等価であることが知られている。したがって、クリークサイズを制限した弦グラフに対しては、PrefixGI は多項式時間で解ける。しかしながら、このアルゴリズムは無駄な計算をしている可能性がある。このアルゴリズムの計算量は与えられた部分写像の定義域のサイズに依存しないものになっている。しかしながら、与えられた部分写像の定義域および値域の間の対応は固定されているため、定義域に含まれる頂点の計算を省略できれば効率を改善することができる。この観点から、より効率の良いアルゴリズムの設計を行う。

(2)制約付きグラフ同型性判定問題に対する多項式時間アルゴリズムの設計

関係 $R \subseteq X \times Y$ および X から Y への部分写像 f に対して、 f が R 写像であるとは、任意の $v \in \text{Dom}(f)$ に対して、 $(v, f(v)) \in R$ が成り立つときをいう。また、2つのグラフ $G=(V, E), H=(W, F)$ および関係 $R \subseteq V \times W$ に対して、 V から W への全単射 f が R 同型写像であるとは、 f が G から H への同型写像であり、かつ R 写像であるときをいう。さらに、 G から H への R 同型写像が存在するとき、 G と H は R 同型であるという。制約付きグラフ同型性判定問題(GIR)とは、2つのグラフの間の R 同型性を問う問題である。GIR は、GI の自然な拡張であり、NP 完全であることが示されている(Lubiw, SIAM J. Comput., 1981).

本研究では、GI に対する既知のアルゴリズムを拡張することで、GIR に対する多項式時間アルゴリズムの設計を試みる。

(3)同型写像および自己同型写像の一部を求める問題の計算量の解析

グラフ同型性判定問題に対しては、その部分解、すなわち同型写像の対応の一部を求めるオラクルを用いることで、1つの同型写像が求まることが知られている(Große et al., Theory of Computing Systems, 2002)。一方 GA に対してはより強い結果が知られている。すなわち、1つの自己同型写像を求めるためには、1つの頂点がある自己同型写像によって動かされるかあるいは固定されるかが分かれば十分であり、頂点間の対応は必要ない(Nagoya et al., Theoretical Computer Science, 2009)。また、GA に関連した問題である RightGA についても同様の結果が示されている。逆に、PrefixGA については、GI と GA が多項式時間等価でない限りそのような性質を持たないことが証明されている。RightGA は GA と多項式時間等価な問題であり、PrefixGA は GI と多項式時間等価な問題である。よって、これらの結果は GI と GA の性質の違いを示唆している。これらの証明のアイデアを GI や GA に関連した他の問題に対して適用することで、GI と多項式時間等価な問題を持つ性質と GA と多項式時間等価な問題を持つ性質の違いを示す。

(4)他の問題への GI や GA の応用

オフライン文字認識では、静的な手書き文字画像からその文字を認識する。この場合、筆順などの動的な情報を用いることができないため、一般的にはオンライン文字認識よりも精度が低い。そこで、静的な文字画像から筆順などの動的な情報を復元できれば、オフライン文字認識の精度の向上が見込める。

筆順を復元するためのアルゴリズムの多くは、文字データを無向グラフで表現し、得

られたグラフの構造を解析するものである。しかしながら、そのほとんどは発見的手法にもとづくものであり、アルゴリズムの正しさが理論的に保障されているものは少ない。

Kato らは、発見的ルールをできる限り使わずに筆順を復元するアルゴリズムを設計した(Kato et al., IEEE Trans. Patt. Anal. Mach Intell., 2000)。しかしながら、彼らのアルゴリズムはループ構造の入れ子など、複雑な構造を持つ手書き文字に対しては、その筆順を正しく復元することはできない。そこで、部分グラフ同型性判定問題を用いてグラフの部分的な構造を解析することで、より一般的な手書き文字に対しても正しく筆順を復元するアルゴリズムを設計する。

4. 研究成果

以下の3つの結果が得られた。

(1)制約付きグラフ同型性判定問題に対する多項式時間アルゴリズム

クリークサイズを制限した弦グラフに対する GIR を解くための多項式時間アルゴリズムを設計した。このアルゴリズムは、弦グラフの tree model が、木の同型性に関して一意に定まることを利用し、木の葉から根に向かう動的計画法により R 同型性を判定する。この結果から、クリークサイズを制限することで、GI だけでなくより難しい問題である GIR が解けることが分かる。

(2)PrefixGI に対する多項式時間アルゴリズム

クリークサイズを制限した弦グラフに対して PrefixGI を解くための多項式時間アルゴリズムを設計した。このアルゴリズムは、PrefixGI から非連結な弦グラフに対する GIR への還元を利用することで実現されている。また、このアルゴリズムの計算量は、既に知られているクリークサイズを制限した弦グラフに対する PrefixGI を解くためのアルゴリズムの時間量を改善している。

(3)静的文字画像からの筆記運動の復元

手書き文字の構造を表現する無向グラフに対して、部分グラフ同型性判定問題を利用してダブルトレースなどの構造を発見し、その筆順を復元するアルゴリズムを設計した。このアルゴリズムの計算量は、ストロークの交差数に関する線形時間であり、既存のアルゴリズムより高速である。また、より実用的なアルゴリズムを設計するため、確率的タブーサーチを用いて筆順を復元するアルゴリズムを設計し、高い精度で正しい筆順を復元できることを実験的に示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① Takayuki Nagoya and Hiroyuki Fujioka, Recovering Drawing Order of Single-Stroke Handwritten Images Using Probabilistic Tabu Search, Journal of Mobile Multimedia, 査読有, vol.8, 2012, 73～87

[学会発表] (計 4 件)

- ① Takayuki Nagoya and Hiroyuki Fujioka, A Graph Theoretic Algorithm for Recovering Drawing Order of Multi-Stroke Character Image, Proc. of the Third International Conference on Intelligent Networking and Collaborative Systems, 2011 年 12 月 2 日, 福岡工業大学
- ② Takayuki Nagoya and Hiroyuki Fujioka, Recovering Drawing Order from Static Handwritten Images Using Probabilistic Tabu Search, Proc. of 2011 IEEE Region 10 Conference, 2011 年 11 月 24 日, バリ, インドネシア
- ③ 名古屋孝幸, 藤岡寛之, Recovering Drawing Order from Static Handwritten Images Using Probabilistic Tabu Search, 第 10 回情報科学技術フォーラム, 2011 年 9 月 7 日, 函館大学
- ④ Hiroyuki Fujioka and Takayuki Nagoya, Recovering Stroke Order from Multi-Stroke Character Images, Proc. of the 2nd International Conference on Innovative Computing and Communication and 2nd Asia-Pacific Conference on Information Technology and Ocean Engineering, vol.1, 2011 年 3 月 6 日, マカオ, マカオ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

名古屋 孝幸 (NAGOYA TAKAYUKI)
鳥取環境大学・環境情報学部・講師
研究者番号：90349796