

機関番号：16301

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2010 ～ 2011

課題番号：22700792

研究課題名 (和文) 多数の実例を分類し系統づけた展開図教育と
教材作成の難しさに関する研究研究課題名 (英文) Systematize education of a development of a 3D object through real
instance classification and difficulty of teaching materialization.

研究代表者

河村 泰之 (KAWAMURA YASUYUKI)

愛媛大学・教育学部・講師

研究者番号：80369967

研究成果の概要 (和文)：

立体の展開図は教材としてよく用いられる。小学校では紙をハサミで切って工作して立方体の箱を作るのがよく広まった教育方法である。後に、見取り図や立体の切断で再び展開図が利用されるが、それ以降の学校教育では展開図はほとんど登場しない。

本研究では、学校教育でよく扱われる展開図の範囲にしぼって、展開図から立体を作る教材を計算機を使って開発した。

研究成果の概要 (英文)：

A development of a 3D object is well used as teaching materials. At an elementary school, the educational method that cutting papers with scissors and folding them is well known. Later, although a development of a 3D object is again used by cutting of solid or a sketch, in the school education after it, a development of a 3D object hardly appears.

In this research, we restrict to development of a 3D object which is frequently used in school education, and developed the teaching materials which make a 3D object from a 2D unfolding paper using the computer.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,200,000	360,000	1,560,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：「科学教育・教育工学」・「科学教育」

キーワード：展開図

1. 研究開始当初の背景

多面体は、20世紀後半以降に活発な研究が成されるようになってきた。近年では、計算機性能の向上もあり、計算機による多面体の研究が多く進められている。多角形を折ることで多面体にするのは、平面のものを立体に組み立てることであるため、現実の問題と

しても重要である。多面体を議論するには、複雑な要素が含まれるため、成果が上がっている研究では「凸多面体に限る」などの様々な制限のあることが多い。例えば、「すべての多面体は単純で重ならない多角形に辺展開することができるだろうか」という問題を考える。辺展開とは、多面体の表面を平面に

展開したとき、この表面の外周がもとの多面体の辺だけである平坦な多角形となることである。研究者らは、多面体を凸図形に限った場合について取り組んでいる。この問題は Shephard によって 1975 年に明示的に提案されたが未だ解決されていない。他にも、「すべての多角形を多面体に折ることができるだろうか」という問題を考えると、凸多角形から凸多面体を折るという限定をすることですでに解決されているが、凸という制約をなくすと未だに解決されていない。このように、多面体を考察するうえで凸性は極めて重要な要素であり、多面体を凸に限定することでいくつかの性質がわかることもあるが、非凸であるものについては問題がたくさん残されている。本研究では、多面体を凸図形に限らず、凸性とは別の視点で制約を加える。具体的には、扱う多面体の展開図が直交多角形になるようなものを考える。直交多角形は、多角形の 1 辺を他の多角形の 1 辺と完全に共有するように連結して構成した図形で、しかもすべての共有辺がその他の共有辺に平行か直交しているものをいう。必然的に多角形は長方形となるが、本稿では簡単のため複数の正方形が辺を共有し合っできる図形と考える。

本研究ではそのような図形に限って展開図を考え、展開図教育を目標に取り組んでいる。多くの展開図教育では、多面体が与えられて、それを辺展開した図形について考える。本研究では、逆に、多角形を与えてそれが多面体になるか考える。先述したように、凸図形でない場合は、与えられた多角形が多面体の展開図になっているか判定することは今のところ明らかにされていない。そこで、与えられる多角形を、直交多角形に限定して考える。実はこの制約を加えても問題は難しい。多角形を与えるだけでなく、どの辺で折るかを先に決めておいてもそれが多面体になるかどうか判定する問題は NP 困難であることが Biedl によって示されている。これは即ち、サイズの小さな多面体ならば手作業でも確認できるが、少し大きくなるだけで確認が難しくなる。つまり、教育現場で実際に、子どもに展開図となっているかどうか分からないような図形を与えてそれを折ることで立体になるか確かめることは非常に難しい活動であることを示している。

2. 研究の目的

立体の展開図は教材としてとても興味深い。小学校では紙をハサミで切って工作して立方体の箱を作るのがよく広まった教育方法である。後に、見取り図や立体の切断で再び展開図が利用されるが、それ以降の学校教育では展開図はほとんど登場しない。本研究では、学校教育における図形・幾何教育に活

かせる展開図の教材を最新の研究事例を取り入れて開発する。

展開図の新しい概念として、一つの展開図から異なる立体を作ることが考えられている。例えば計算幾何学の分野で展開図の研究が盛んである。Demaine と O'Rourke が直近の 10 年ほどの計算幾何学の研究成果をまとめたものが 2007 年に出版され、その中で展開図は、折り紙、多面体、アルゴリズムとの関連が研究されている。この本に紹介されている展開図で、二通りの直方体を作る展開図の例がある。このような展開図は 2 種類しか知られていなかったが、2008 年には、上原によって多数(2000 種類以上)発見された。展開図は実用的技術と関連が深く、盛んに研究されているにも関わらず、わが国の数学教育では断片的に取り入れられるに過ぎない。さらに、芳沢がわが国の数学教育における 16 のつまずきの中で指摘している通り、立体の切断や展開をイメージできない子どもは少なくない。そこで、活発化しつつある展開図研究の最新の成果を分かりやすく取り入れ、産業への応用を強く意識した算数・数学教育の教材の開発を試みる。

3. 研究の方法

次のような方法で行う：

- [1] 多角形（展開図になっているかわからない）を順次列挙し、多面体になるか確かめる
- [2] シミュレータを開発する
- [3] 展開図教材を開発する

三谷と上原は、直方体に着目し、計算機を用いて同じ展開図から違う直方体を作ることができる展開図を面の枚数毎で調べ、多数発見した。基本的な方針は直方体からランダムに辺展開を生成し、異なる直方体から同じ展開図が生まれるか確認することで成果を挙げた。本研究では、直方体ではなく、多角形を列挙する方法をとる。具体的には、逆探索による列挙アルゴリズムによってメモリを節約しながら、全ての展開図について多面体を形成するか確認する。

3.1 単位直交準展開図

まず定義を確認する。多面体とは、複数の面で囲まれた立体である。ただし、囲んでいる面の中に 2 つ以上重なっている面が存在する立体は多面体とは考えない。直交多面体は、隣接する面同士が直交していて、2 面角が 90° 、 180° 、 270° の 3 種類の重複を許す組み合わせである多面体である。

また、平面上で多角形の連結で構成され、連結部分を折り線とし、折り線に折る方向（山、谷、折りなし）が与えられている図形を準展開図と定義する。準展開図は折り目

で折っても必ずしも多面体なるとは限らない。そして、連結する多角形が単位正方形のみ準展開図を単位直交準展開図と定義する。

本研究では、単位直交準展開図から直交多面体を折ることだけを考えるので、折り線で折る角度は 90° (山), 0° (折りなし), 270° (谷)とする。ただし、図 1(a)のように、単位正方形が直交多面体の内部にあるものや図 1(b)のように複数の直交多面体が独立して存在する立体は直交多面体ではないと仮定する。

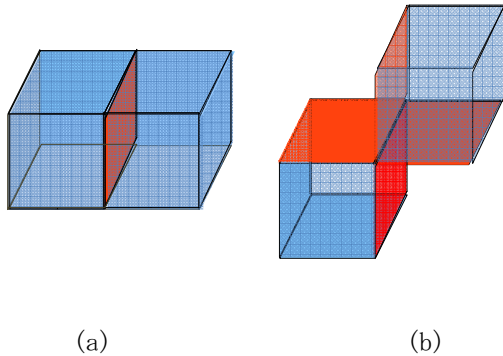


図 1 (a) 面が直交多面体の内部にある
(b) 複数の直交多面体が辺のみで接続

3.2 取り組み

本研究では、単位直交準展開図を列挙する方法とその列挙した単位直交準展開図が直交多面体を折ることができるかどうかを判定する方法を考案し、計算機を用いてその結果を確認した。また、本稿で提案する2つの方法において、直交多面体を折ることができる単位直交準展開図を探す際に、面の枚数が増えるにつれて計算時間がかかりすぎてしまう問題について改善する方法を開発した。同時に、折り線通りに折った図形が直交多面体となっているかどうかの判定を確認するために可視化するシステム(シミュレータ)を開発した。

3.3 単位正方形の連結

さらに、単位正方形の連結をどのように考えたか述べる。単位正方形同士を辺で連結させていくポリオミノという図形がある。本研究で扱う単位直交準展開図は、ポリオミノに連結情報と折り線の情報を付加したものと考えることができる。ただし、注意したいことは、図 2(a)は正方形4枚のポリオミノの1つであるが、同じ図で単位直交準展開図を考えるとこれは1通りではない。図 2(b) (c)のように、平面で正方形を並べるだけならば同じ形に見えるが、連結する辺が違えば、折り終えた立体が別々のものになってしまう。連結情報と折り線を追加する

だけで、1つの n -オミノに対して、 $0(2^n)$ 個程度の直交準展開図が考えられる。本研究では、逆探索による列挙アルゴリズムでこれを順次生成し、それぞれが多面体を折るか検証した。また、ポリオミノを回転、もしくは裏表を同一視するかどうかでも検証する個数は変わる。本研究では全て別の図形と考える。

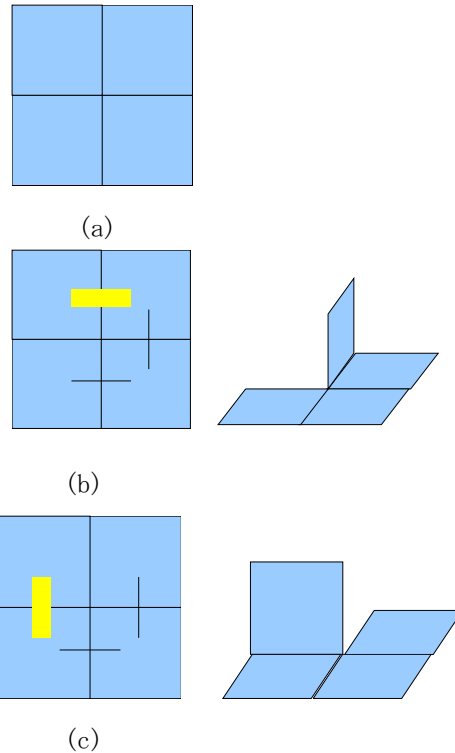


図 2 (a) 正方形4枚のポリオミノの1種
(b), (c) 4枚の単位正方形を連結させた単位直交準展開図と太線部分を折った立体

4. 研究成果

本研究では、正方形を並べた多角形を順次生成して多面体になるか確認する過程をシミュレータによって視覚化するシステムを開発した。これにより、最新の研究を子どもたちに説明できるようになった。

一般的な展開図シミュレータでは立体を与えてから辺を切断して展開するものが多いが、本研究では展開図を考えるために平面図から立体を組み立てるようなシミュレータを作成した。これにより、平面図形が多角形となっているか考える活動を行いやすくなった。

多くの研究に倣い単位正方形を並べて 90° の折りだけを許す直交多面体に限定した。このように限定しても元の平面図が立体を作る展開図になっているか判定するこ

とはそれほど明らかではない。ならべる単位正方形の数を多くすると、その枚数で何通りの直交多角形が作れるか調べることも容易ではない。組合せを考えると簡単に指数個のオーダーになるからである。

本研究では、枚数を与えたときすべての並べ方を作り出す多項式時間遅延アルゴリズムを与えた。実際はほとんどの場合で定数時間しか遅れない。作成したプログラムを web ページで公開した。

5. 主な発表論文等

ホームページ等

<http://www.ed.ehime-u.ac.jp/~kawamura/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河村 泰之 (KAWAMURA YASUYUKI)

愛媛大学・教育学部・講師

研究者番号：80369967