様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　5　月　15　日現在

機関番号：12612
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010 年度　～　2011 年度
課題番号：22710138
研究課題名（和文）非完備市場リスクを考慮した参入・撤退オプションの評価手法：一般化相補性アプローチ
研究課題名（英文）A generalized complementarity approach for evaluating entry-exit options in incomplete markets
研究代表者
長江 剛志（NAGAE TAKESHI）
電気通信大学大学院 情報システム学研究科 准教授
研究者番号：30379482

研究成果の概要（和文）：
本研究では，非完備市場リスクを考慮した参入・撤退オプションの評価手法を構築する．具体的には，資産市場と部分的に連動するキャッシュ・フロー流列(CFS: cash flow streams)を発生させるプロジェクトを考え，このプロジェクトの無裁定価格と最適参入・撤退タイミングを同時に決定する問題を定式化する．次に，この問題が非線形一般化相補性問題の動学系に帰着することを明らかにする．

研究成果の概要（英文）：
In this article, we develop a novel method for pricing entry-exit option problems in incomplete markets. We first consider a project with cash flow streams, whose stochastic dynamics is correlated to a financial market. We then formulate the problem of finding an arbitrage price of that project as well as its optimal entry-exit timing. Finally, we show that the problem can be reduces to a dynamics system of nonlinear generalized complementarity problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2010 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2011 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：複合新領域
科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学・安全システム
キーワード：OR，非完備市場リアルオプション

１．研究開始当初の背景
不確実な収益をもたらす実物投資に対する意思決定問題は，オペレーションズ・リサーチおよび経営科学(OR/MS:*operations research and management science*)における主要課題の一つであり，これまでに多くの研究が蓄積されてきた．特に，1990 年代以降，それまでに著しい発展を遂げていた金融工学を援用したリアル･オプション(RO: *Real Option*)理論が注目を集めている．RO 理論の登場は，実物投資の意思決定を連続時間-連続状態の枠組で扱うことを可能にした(Dixit, 1994)}．このことは,資金調達や資産管理などを扱う“資産負債管理(ALM: *Asset-Liability Management*)問題”と，事業への参入・撤退といった“実物投資問題"とが，はじめて同じ枠組で整合的に

議論できるようになったことを意味する．しかしながら，現在の金融工学あるいはRO分析手法は，いずれも，現実の実物投資問題を考える際に不可避な(1)市場の非完備性と(2)意思決定の柔軟性という2つの特性を“同時”に扱うことができない．このうち，前者は，事業収益の変動が(証券・債券などの)市場資産の収益率の変動と“部分的に”連動する性質を指す．一方，後者は，事業への参入および事業からの撤退が，任意のタイミングで任意の回数行なえる性質を指す．

２．研究の目的

本研究では，市場の非完備性を明示的に考慮した参入・撤退オプション問題に対する定量的分析手法を構築する．具体的には，参入・撤退オプション問題に対する最新の分析手法である一般化相補性アプローチと，非完備市場下におけるオプション評価手法としてマクロ経済学やファイナンス分野で注目を集める確率的割引率アプローチを統合する．このうち，前者は，確率制御問題として定式化された参入・撤退オプション問題の最適性条件を，数理計画分野で知られる一般化相補性問題として記述することで，その効率的数値解法の開発を可能にする．一方，後者は，金融工学の基礎となる無裁定原理，および不確実性下の経済学/意思決定科学で用いられる効用最大化原理のいずれとも整合的な方法であり，これを採用することで見通しのよい資産評価手法が構築できる．

３．研究の方法

本研究では，非完備市場下での参入・撤退オプション問題に対する定量的分析手法を構築する．具体的には，以下の3つを明らかにする．

1. 定式化および一般化相補性問題として最適性条件の導出：非完備市場下での参入・撤退オプション問題を確率制御問題として定式化する．その最適性条件が一般化相補性問題として記述できることを明らかにする．
2. 非完備市場下の参入・撤退オプション・モデルの定性的性質の分析：従来のリアル・オプション研究において解析解が知られている特殊なケース(e.g. 無限満期で幾何Brown運動に従う原資産価格を仮定)を用いて，提案モデルの定性的な性質および非完備市場リスクが参入・撤退戦略に影響を与えるメカニズムを明らかにする．
3. 効率的な数値解法の開発およびモデルの数値解析：現実的な仮定(e.g. 有限満期，任意数の市場資産および一般的な確率過程モデル)の下で，参入・撤退オプション問題の具体的な解を効率的に計算するための数値解法を開発する．開発した数値解法を用いた感度分析などによって，事業収益を市場資産価格の間の相関の強さや不確実性の大きさの違いが参入・撤退オプション価格や最適戦略にもたらす影響などを定量的に評価する．

４．研究成果

4.1 プロジェクト評価問題の定式化

4.1.1 モデルの枠組

ある適当な確率空間(Ω，F，P)を考える．ここで，ΩはF事象集合，FはΩの部分集合の適当な$\boldsymbol{\sigma}$-集合体，PはF上の適当な確率測度である. 以下では, Pを客観的確率測度と呼ぶ. (Ω，F，P)上の互いに独立なK次元P-標準Brown運動を$\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}$で表し，$\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}$から生成されるフィルトレーションを$\{F(t)|t\geqq 0\}$で表す. 確率過程に関するこれらの基礎的な用語については，例えば，Rogers and Williams(2000)などを参照されたい.

1種類の無危険資産(以下では債券と呼ぶ)とN種類の危険資産(以下では証券と呼ぶ)が取引される資産市場を考える．ここで，危険資産の集合をNとする．時刻tにおける無危険資産およびn番目危険資産の価格を，それぞれ$B(t)$および$\hat{S}_n(t)$で表したとき，そのダイナミクスを以下で与える：

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = r(t)dt \tag{1}$$

$$\frac{d\hat{S}_n(t)}{S_n(t)} = \hat{\alpha}_n(t)dt + \sigma(t)d\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{P}}(t)\ , \tag{2}$$

$r(t)$は無危険利子率，$\hat{\alpha}_n(t)$ および$\sigma(t)\in\mathcal{R}_+^{1\times K}$は，それぞれ，$n$番目危険資産のドリフト(収益率の期待値)およびボラティリティ(収益率のばらつきの大きさ)であり，いずれもtについての所与の関数である．$\mathrm{d}\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t)$は$\boldsymbol{W}^{\mathrm{P}}(t)$の微小時間$\mathrm{d}t$における増分を表し, その定義から以下を満足する：

$$\begin{aligned} E^P\left[d\mathbf{W}^P(t)\,|\,\mathcal{F}(t)\right] &= \mathbf{0}_{\mathrm{K}} \\ \left\{d\mathbf{W}(t)\right\}'\left\{d\mathbf{W}(t)\right\} &= dt \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{0}_{\mathrm{K}}$は全ての要素が0のK次元列ベクトルである．

時刻tのn番目危険資産価格のt=0での現在価値(同時刻の無危険資産価格を用いて割り引いた価格；割引済価格)を$S_n(t) := \hat{S}_n(t)/B(t)$で表す. そのダイナミクスは以下のように表される：

$$\frac{dS_n(t)}{S_n(t)} = \alpha_n(t)dt + \sigma_n(t)d\mathbf{W}^{\boldsymbol{P}}(t) \tag{4}$$

$\alpha_n(t) := \hat{\alpha}_n(t) - r(t)$は$n$番目危険資産の超過収

益率である．

4.1.2 プロジェクトの CFS と状態変数のダイナミクス

CFS に影響を与える状態変数を L 次元の確率変数 $\boldsymbol{P}$ で表し，そのダイナミクスを以下の確率微分方程式で与える：

$$\mathrm{d}\mathbf{P}(t)=\mathbf{u}(t,\mathbf{P}(t))dt+\mathbf{v}(t,\mathbf{P}(t))d\mathbf{W}^{\boldsymbol{P}}(t) \qquad (5)$$

ここで， $\mathbf{u}\in\mathcal{R}^{\mathrm{L}}$ および $\mathbf{v}\in\mathcal{R}_{+}^{\mathrm{L\times K}}$ は，t および $\boldsymbol{P}$ についての所与の関数であり，それぞれ状態変数の増分の期待値および標準偏差を表す．

事業期間が$[0,T]$であるようなプロジェクトを考え，そこから発生する CFS が，**i)**期間 $t\in[t,T\ )$の間，毎時刻発生する“利潤フロー” $\hat{\pi}(t,\mathbf{P})$ ； **ii)**プロジェクト終了時刻 T において発生する“終端ペイオフ” $\hat{\Pi}(\mathbf{P})$ ；から構成されるとする． $\hat{\pi}(t,\mathbf{P})$ は時刻と状態変数 $\boldsymbol{P}$ についての所与の関数， $\hat{\Pi}(\mathbf{P})$ は状態変数についての所与の関数である．それぞれの t=0 での現在価値を $\pi(t,\mathbf{P}):=\hat{\pi}(t,\mathbf{P})/B(t)$ および $\Pi(\mathbf{P}):=\hat{\Pi}(\mathbf{P})/B(T)$ で表す．このとき期間$[t,T]$にプロジェクトから得られる CFS の現在価値は以下のように表現される：

$$\mathcal{J}(t,T):=\int_{t}^{T}\pi\left[s,\mathbf{P}(s)\right]\mathrm{d}s+\Pi\left[\mathbf{P}(T)\right] \qquad (6)$$

4.1.3 無裁定原理とプロジェクトの無裁定価格

本章節では，無裁定価格評価法について説明する．資産市場においては，無裁定原理が成り立つと仮定する．このとき，資産市場で無裁定原理が成立することと，等価 martingale 確率測度 (EMM : *equivalent martingale measure*)Q が存在することが同値であることが知られている(Harrison and Pliska，1981).

ここで，EMM とは，客観的確率測度 P と等価であり，任意の資産価格を martingale にする確率測度である．すなわち，無裁定原理が成立することと，以下を満足する Q が存在することは同値である：

$$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}\left[S_n(s)\,|\,\mathcal{F}(t)\right]=S_n(t),\ \forall t\le s,\ \forall n\in N \qquad (7)$$

ここで，$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}\left[\cdot\,|\,\mathcal{F}(t)\right]$ は $\mathcal{F}(t)$ を与件とした条件付き期待値を表す．

このとき，無裁定原理を満足するプロジェクトの取引価格とは，将来そこから発生する CFS の EMM Q の下での期待現在価値：

$$C(t,\mathbf{P}):=\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}\left[\mathcal{J}(t,T)\,|\,(t,\mathbf{P})\right] \qquad (8)$$

に他ならない．以下では，$C(t,\ \boldsymbol{P})$をプロジェクト価格と呼ぶ．これより，プロジェクト価格評価問題は，無裁定条件を満足する EMM 推計問題として定式化される：

[P0]　　Find Q such that (8)　　(9)

4.2 リスクの市場価格を用いた表現

プロジェクト価格評価問題[P0]は，確率測度 Q を明示的な未知変数とするため，そのままでは扱いづらい．そこで，本節では，Cameron-Martin-Girsanov (CMG)定理を用いることで，問題[P0]がリスクの市場価格(MPR：*market price of risk*)と呼ばれる K 次元ベクトルを未知変数とする問題に帰着することを示す．

CMG 定理では，P から等価な確率測度 Q への変換が，それぞれの確率測度の下での標準 Brown 運動にドリフト項を加えるだけで実現できることが示されている．この CMG 定理を用いれば，無裁定条件(8)は $\boldsymbol{\lambda}$ のみを用いた表現に書き換えられる．まず式(8)を

$$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}\left[\frac{S_n(s)-S_n(t)}{S_n(t)}\ \middle|\ \mathcal{F}(t)\right]=0 \qquad (10)$$

と書き直す．次に，s→t の極限をとり，CMG 定理を適用すれば，無裁定条件は

$$\left\{\alpha_n(t)-\sigma_n(t)\lambda(t)\right\}dt=0 \qquad (11)$$

と書き直せる．式(11)において，λ_{K} とは，k 番目リスク要因を 1 単位受け取るときの資産収益率の増分と解釈できる．このため，$\boldsymbol{\lambda}$ はリスクの市場価格(MPR：*market price of risk*)と呼ばれる．

ここで，リスク要因が市場リスクのみであるとは，rank($\boldsymbol{\sigma}(t)$)=K であることに他ならない．このとき $\boldsymbol{\sigma}(t)$には逆行列 $\boldsymbol{\sigma}(t)^{-1}$ が存在し，MPR は無裁定条件式(11)から $\boldsymbol{\lambda}(t)=\boldsymbol{\sigma}(t)^{-1}\boldsymbol{\alpha}(t)$と求められる．ただし，rank($\boldsymbol{\sigma}(t)$)<K となる場合(i.e. 非市場リスクが存在する)においては，K×N の一般化逆行列 $\sigma^{+}:=\sigma'(\sigma\sigma')^{-1}$ を用いて

$$\lambda(t)=\sigma^{+}(t)\alpha(t) \qquad (12)$$

と表される． CMG 定理は，$\lambda_0^T:=\{\lambda(t):t\in[0,T]\}$ が求められれば，それに対応する EMM$Q^{(\lambda)}$が得られることを意味している．これより，市場リスクを考慮したプロジェクト価格評価問題[P0]は，無裁定条件式(11)を満足する λ_0^T を求める以下の問題に帰着する：

[P0 -MPR]　Find　λ_0^T　such that (11)　　(13)

このときプロジェクト価格は，こうして求められた $\boldsymbol{\lambda}$ を用いて

$$C(t,\mathbf{P}):=\boldsymbol{E}^{Q(\lambda)}\left[\mathcal{J}(t,T)\,|\,(t,\mathbf{P})\right] \qquad (14)$$

と表される．

無裁定価格評価法は資産市場情報から市場リスクの価格を推計している．しかし，参照できる情報がない非市場リスクについては考慮していない，という問題点がある．

4.3 非市場リスク価格制限法

4.3.1. Kullback-Leibler 情報量制約を用いた非市場リスク価格制限法

本節では，P に対する Q の Kullback-Leibler(KL)情報量に制約を設けることで上・下限の幅を実用的な範囲(good deal bound)に収めることを考える．KL 情報量とは，2 つの確率測度の“距離”を表す指標として，確率論や情報理論の分野では一般的に用いられる概念である． このとき，KL 情報量に制約を設けることは，遷移確率の歪みに上限を与えることに等しい．さらに，このことは非市場リスクの価格の大きさに制限を設けることと同義である．

まず，客観的確率測度 P に対する等価 martingale 測度 Q の KL 情報量は以下の式で定義される：

$$H(\boldsymbol{Q};\boldsymbol{P}) := \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Q}}\left[\ln\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right] \tag{15}$$

ここで, dQ/dP は Radon-Nikodym 微分である．本研究では，無裁定条件に加え，問題[P0-U]に

$$\hat{H} \geq H(\boldsymbol{Q};\boldsymbol{P}) \tag{16}$$

を設ける．無裁定条件下での EMM 推計問題[P0-U]に，KL 情報量制約(16)を設けた問題は以下のように定式化される：

$$\text{[P-L]}\quad \begin{aligned}&\underline{C}(t,\mathbf{P}) := \min_{\lambda}.\boldsymbol{E}^{Q(\lambda)}\left[\mathcal{J}(t,T)\,|\,(t,\mathbf{P})\right]\\&\text{s.t. (11) and (16)}\end{aligned} \tag{17}$$

4.3.2 リスクの市場価格を用いた表現

本節では, 問題[P-U]および[P-L]をリスクの市場価格を用いて表現する．まず，下限価格評価問題[P-L]について，KL 情報量制約(16)を Lagrange 緩和した以下の問題：

$$\min_{\lambda}.\boldsymbol{E}^{Q(\lambda)}\left[\mathcal{J}(0,T)+\frac{1}{\gamma}\ln\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}\right]\text{s.t. (16)} \tag{18}$$

を考えよう．ここで 1/γ は KL 情報量制約(16)に対する Lagrange 乗数である．KL 情報量の定義(15)に CMG 定理を適用すれば, リスクの市場価格のみを用いて

$$H(\boldsymbol{Q};\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{E}^{Q(\lambda)}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \lambda(t)'\lambda(t)\mathrm{d}t\right] \tag{19}$$

と表現できる．これにより，問題[P-L]は以下のように書き換えられる：

[P-L-KL]

$$\underline{C}(0,\mathbf{P}) := \min_{\lambda_0^T}.\boldsymbol{E}^{Q(\lambda)}\left[\mathcal{J}(0,T)+\frac{1}{2\gamma}\int_0^T \lambda(t)'\lambda(t)\mathrm{d}t\,|\,(t,\mathbf{P})\right] \tag{20}$$

s.t. (11)

このとき，Lagrange 緩和によって KL 情報量に制約を設けることと，リスクの市場価格 $\boldsymbol{\lambda}$ に対して以下の制約を設けることは同義である．このことから，問題 [P-L-KL]のリスクの市場価格 $\boldsymbol{\lambda}$ は,

$$\underline{\lambda} := \sigma^{+}\sigma + \gamma[\mathbf{I}_{\mathrm{K}} - \sigma^{+}\sigma]\mathbf{v}'\nabla\underline{V} \tag{21}$$

と表すことができる．

KL 情報量制約を Lagrange 緩和した価格評価問題[P-U-KL]および[P-L-KL]に対しては，その双対問題がリスク回避的な主体のポートフォリオ問題として解釈できることが知られている．このとき，KL 情報量制約に対する Lagrange 乗数 γ は，プロジェクトを取引する主体のリスク回避度として解釈できる(赤松・長江, 2004；Carmona，2009)．このことは，問題[P-U-KL]を具体的に解く際には，KL 情報量の上限 $\hat{H}$ ではなく，リスク回避度 γ を外生的に与える方が実用的であることを示唆している．なお，資産市場情報からリスク回避度を推計する方法については本研究の範囲を超えるので詳述しないが，マクロ経済学の分野で多くの研究蓄積がある．その妥当な値については齊藤(2006)などが参考になる．

4.4 偏微分方程式としての再定式化

本章および次章では，非市場リスク価格制限法から具体的にプロジェクト価格を計算する手順を示す．具体的には，まず，プロジェクトの無裁定価格を求める問題[P0]および下限評価問題[P-L]の最適性条件を求める．そして，これらの問題がいずれも偏微分方程式に帰着することを明らかにする．

4.4.1 プロジェクト価格が従う偏微分方程式 (Feynman-Kac 公式)

本節では，プロジェクトの無裁定価格を求める問題[P0]が，線形偏微分方程式を解く問題に帰着することを示す．

時刻 t におけるプロジェクト価格の式(8)に対して DP(*Dynamic Programming*)原理を適用し，伊藤の補題を用いて整理すれば,

プロジェクト価格が従う以下の偏微分方程式を得る：

$$\begin{aligned}&\pi(t,\mathbf{P})+\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\{\mathbf{u}(t,\mathbf{P})-\mathbf{v}(t,\mathbf{P})\lambda(t)\}'\nabla\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\mathbf{v}(t,\mathbf{P})'[\nabla^2]\mathbf{v}(t,\mathbf{P})\right]\right\}C(t,\mathbf{P})=0\end{aligned} \tag{22}$$

ただし，t=T において，$C(t, \boldsymbol{P})$は以下の終端条件に従う：

$$C(T,\mathbf{P}) := \Pi(\mathbf{P}) \qquad \forall\mathbf{P}\in\mathcal{R}_{+}^{L} \tag{23}$$

結局，プロジェクト価格評価問題[P0]は，偏微分方程式(22)を終端条件(23)の下で解く問題に帰着する．このように，期待値を計算することとある種の偏微分方程式を解くことが等価であることは，Feynman-Kac の公式(例えば，Shreve，2003)として知られている．こうした偏微分方程式の数値解法については特性がよく知られており，その差分近似解を精度よく効率的に求める数値解法が数多く提案・応用されている．詳しくは，例えば Neftci(2000)などを参照されたい．

4.4.2 下限価格評価問題の最適性条件

問題[P-L]の最適値関数を以下のように定義する：

$$\underline{V}(t,\mathbf{P}) := \min_{\lambda}. C(t,\mathbf{P};\lambda) + \frac{1}{\gamma} H(t,\mathbf{P};\lambda) \quad \text{s.t. (11)} \tag{24}$$

とする．ここで，C, H はそれぞれ以下の式で定義される：

$$C(t,\mathbf{P};\lambda) := \boldsymbol{E}^{Q(\lambda)}\left[\mathcal{J}(t,T) \mid (t,\mathbf{P})\right] \tag{25}$$

$$H(t,\mathbf{P};\lambda) := \boldsymbol{E}^{Q(\lambda)}\left[\frac{1}{2}\int_t^T \lambda(s)'\lambda(s)\,\mathrm{d}s \mid (t,\mathbf{P})\right] \tag{26}$$

この最適値関数に対して DP(Dynamic Programming)原理を適用すれば，
以下の HJB 方程式を得る．

$$\begin{aligned} &\min_{\lambda(t)}.\ \pi(t,\mathbf{P}) + \frac{1}{2\gamma}\lambda(t)'\lambda(t) \\ &\quad + \mathcal{L}\underline{V}(t,\mathbf{P}) - \lambda(t)'\mathbf{v}(t,\mathbf{P})'\nabla\underline{V}(t,\mathbf{P}) = 0 \\ &\text{s.t.} \quad (11) \end{aligned} \tag{27}$$

ここで L は

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(t,\mathbf{P})'\nabla + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\mathbf{v}'(t,\mathbf{P})[\nabla^2]\mathbf{v}(t,\mathbf{P})\right] \tag{28}$$

なる偏微分作用素である．

4.4.3 最適値関数が従う非線形偏微分方程式

本節では，HJB 方程式(27)にリスクの市場価格 $\boldsymbol{\lambda}$ についての最適性条件を代入することで，下限価格評価問題が非線形偏微分方程式に帰着することを示す．以下では，特に必要がない限り$(t, \boldsymbol{P})$についての記述は省略する．
HJB 方程式(27)の最適性条件より下限価格評価問題[P-L]に対する最適なリスクの市場価格は以下の式で求められる．

$$\underline{\lambda} = \sigma^{+}\sigma + \gamma\left[\mathbf{I}_{\mathrm{K}} - \sigma^{+}\sigma\right]\mathbf{v}'\nabla\underline{V} \tag{29}$$

I_{K} は K 次元単位行列である．
こうして得られた $\boldsymbol{\lambda}$ を HJB 方程式(31)に代入すれば，下限価格評価問題[P-L]の最適値関数 $\underline{V}$ が従うべき以下の非線形偏微分方程式を得る．

$$\pi + M\underline{V} + \tfrac{1}{2\gamma}\alpha'(\sigma\sigma')^{-1}\alpha = 0 \tag{30}$$

ここで，M は非線形偏微分作用素であり，以下の式で定義される：

$$MV = \mathcal{L}\overline{V} - (\nabla\overline{V})'\mathbf{v}\boldsymbol{\sigma}^{+}\alpha - \tfrac{\gamma}{2}(\nabla\overline{V})'\mathbf{v}\left[\mathbf{I}_{\mathrm{K}} - \boldsymbol{\sigma}^{+}\boldsymbol{\sigma}\right]\mathbf{v}'\nabla\overline{V}$$

ただし，時刻 t=T において，問題[P-U-KL]および[P-L-KL] の最適値関数はいずれも，以下の終端条件に従う：

$$\underline{V}(T,\mathbf{P}) = \overline{V}(T,\mathbf{P}) = \Pi(\mathbf{P}),\ \forall\mathbf{P} \in \mathcal{R}^{\mathrm{L}} \tag{31}$$

結局，無裁定条件と KL 情報量制約の下でプロジェクト下限価格を評価する問題[P-U-KL]は，非線形偏微分方程式(30)を終端条件(31)の下で解く問題に帰着することが判った．

4.5 参入・撤退が行える場合への拡張

4.5.1 定式化

前節までの結果は，参入・撤退が可能な場合へも拡張可能である．任意の時刻において，プロジェクトが 2 つのモード——生産活動を行い，利潤フローを発生させる“操業モード”($m(t)=1$)もしくは生産活動を停止し，一切の CFS を発生させない“休止モード”($m(t)=0$)——のいずれか一方を取れるものとする．時刻 t において状態変数が $\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}$ でプロジェクトモードが $m(t)=m$ であるとき，プロジェクトから発生する利潤フローを $\pi(t,\mathbf{P},m)$ で表す．以下では，休止から操業へモードを切り替えることを「参入する」，操業から休止へモードを切り替えることを「撤退する」と呼ぶ．参入および撤退には，それぞれ，所与の埋没費用 $\hat{X}_{0,1}$ および $\hat{X}_{1,0}$ が発生するとする．期間 $[t,T]$ 中の意思決定戦略を $\beta_t^T = \left\{m(t,\mathbf{P},m^{-}) \mid t \in [t,T]\right\}$ で表す．意思決定戦略 β_t^T の下で標本 $\omega \in \Omega$ 上で発生する CFS の現在価値は以下の式で定義される．

$$\begin{aligned} J(t,T,\beta_t^T) &= \int_t^T \pi[s,\mathbf{P}(s),m(s)]\,\mathrm{d}s \\ &\quad - \int_t^T \delta_{0,1}(s)X_{0,1}(s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T \delta_{1,0}(s)X_{1,0}(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

ここで，$X_{i,j} = \hat{X}_{i,j}/B(t)$，$\delta_{0,1}(t), \delta_{1,0}(t)$ は，それぞれ，戦略 β_t^T の下で時刻 t に参入(撤退)する場合は $1/\mathrm{d}t$，そうでなければ 0 となる Dirac のデルタ関数である． このとき，非完備市場下での参入・撤退オプション問題は，以下のように定式化できる：

$$V(t,\mathbf{P},m) = \max_{\beta}\min_{\lambda} E^{Q(\lambda)}\left[J(t,T;\beta_t^T) - \tfrac{1}{\gamma}H(t,\mathbf{P};\lambda) \mid (t,\mathbf{P},m)\right]$$

4.5.2 最適性条件

時刻 t に状態変数が $\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}$ でモード $m(t)=1$ が選択されていたとしよう．このとき，式に DP 原理を適用すれば, 時刻 t における意思決定は以下の 2 つの代替案のいずれか一方を選択する問題に帰着する：a)微小時間だけ操業モードを継続する，もしくは b)直ちに撤退し休止モードに切り替える．以下では，それぞれの代替案が選択されるときに最適値関数 $V(t,\mathbf{P},m)$ が満足すべき条件を導出し，それらをまとめたものが一般化相補性問題として記述できることを明らかにしよう．

<u>微小時間だけ操業モードを継続する場合</u>

微小時間 Δt だけ操業モードを継続する場合, 4.4.3 と同様の分析から, 最適値関数が従う以下の偏微分不等式を得る：

$$-MV_1(t,\mathbf{P})-\pi_1(t,\mathbf{P})-\tfrac{1}{2\gamma}[\alpha'(\sigma\sigma')^{-1}\alpha](t)\geq 0$$

<u>直ちに休止モードに切り替える場合</u>

このとき，最適値関数は以下の不等式を満足する：

$$V_1(t,\mathbf{P})-V_0(t,\mathbf{P})+X_{1,0}(t)\geq 0$$

任意の $(t,\mathbf{P})$ において, 常にいずれか一方の代替案が選択されるため， 2 つの不等式のうち, いずれか一方について等号が成立する．これより， $V_1(t,\mathbf{P})$ が従うべき最適性条件は，以下の相補性条件として記述される：

$$\min\Big\{-MV_1(t,\mathbf{P})-\pi_1(t,\mathbf{P})-\tfrac{1}{2\gamma}[\alpha'(\sigma\sigma')^{-1}\alpha](t),\quad V_1(t,\mathbf{P})-V_0(t,\mathbf{P})+X_{1,0}(t)\Big\}=0$$

同様に, 時刻 t に状態変数が $\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}$ でプロジェクトが休止モード($m(t)=0$)である場合に最適値関数 $V_0(t,\mathbf{P})$ が従うべき最適性条件もまた相補性条件として記述される．このとき, V_1 が従う相補性条件には V_0 が含まれており, V_0 が従う相補性条件には V_1 が含まれている．このことは，これらの相補性条件は独立ではなく，最適値関数 V_0,V_1 を求めるためには，これらを連立させた以下の非線形一般化相補性問題を解く必要があることを意味している：

$$\begin{cases}\min\Big\{-MV_1(t,\mathbf{P})-\pi_1(t,\mathbf{P})-\tfrac{1}{2\gamma}[\alpha'(\sigma\sigma')^{-1}\alpha](t), \\ \qquad V_1(t,\mathbf{P})-V_0(t,\mathbf{P})+X_{1,0}(t)\Big\}=0 \\ \min\Big\{-MV_0(t,\mathbf{P})-\pi_0(t,\mathbf{P})-\tfrac{1}{2\gamma}[\alpha'(\sigma\sigma')^{-1}\alpha](t), \\ \qquad V_0(t,\mathbf{P})-V_1(t,\mathbf{P})+X_{0,1}(t)\Big\}=0\end{cases}$$

以上のことから，非完備市場リスクを考慮した参入・撤退オプション問題は，非線形一般化相補性問題の動学系として記述されることが明らかになった．

4.5 まとめと今後の課題

本研究では，非完備市場リスクを考慮した参入・撤退オプション問題を確率制御問題として定式化した．具体的には，まず，無裁定条件と Kullback-Leibler 情報量制約の下で, プロジェクト価格の上下限を求める問題が非線形偏微分方程式となることを明らかにした．次に，この分析が，プロジェクトの参入・撤退タイミングが選択可能な枠組へも拡張可能であり，非完備市場の下での参入・撤退オプション問題が非線形偏微分作用素を含む非線形一般化相補性問題の動学系に帰着することを明らかにした．

本事業では，この一般化相補性問題の解法を開発し，それを用いて市場の非完備性がプロジェクト価格や最適参入・撤退戦略に及ぼす影響を明らかにする予定であった．しかしながら，一般化線形相補性問題に帰着させるために状態変数の変換を行なった際，境界条件での処理が影響して数値解が振動したり，解が発散するなど，数理解析では明らかにならなかった問題点が生じた．また，変数変換を行わずに非線形相補性問題として解く方法も試したが，この場合もパラメータによって解が発散するケースが生じた．偏微分作用素を含む相補性問題の動学系に対する境界条件の与え方について，一般的な理論は存在しないため，今後は，こうした境界条件の取り扱いについて理論的解析を進める必要があろう．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 2 件）

1. <u>長江 剛志</u>・藤田 順平：市場の非完備性を考慮した参入・撤退オプション，日本リアル・オプション学会, CD-ROM, 2010. 11.
2. <u>長江 剛志</u>・藤田 順平：非完備市場リスクを考慮した参入・撤退オプション問題,「金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2009」， 2009, 12.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

長江 剛志（NAGAE TAKESHI）

研究者番号：30379482