

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 6 日現在

機関番号：11501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2010～2012

課題番号：22740001

研究課題名（和文） ガロア点を用いた射影多様体の分類理論と新展開

研究課題名（英文） Classification theory of projective varieties by Galois point and new developments

研究代表者

深澤 知 (FUKASAWA SATORU)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：20569496

研究成果の概要（和文）：(1) 「正標数における非特異平面曲線のガロア点の分布」を完全決定した。(2) 標数2のKlein4次曲線を一般化し、「ガロア点を複数もつ」曲線の族を与えた。(3) 標数正のある種の平面有理曲線に対してガロア点がある有理点と一致することを示した。(4) 研究(3)の曲線が良い代数幾何符号を呈することを、本間氏、Kim氏との共同研究により示した。(5) 三浦氏とガロア点と双対曲線の関係について共同研究を行ない（標数零）、「非特異曲線の双対曲線はガロア点をもたない」ことを示した。

研究成果の概要（英文）：(1) I completely settled the distribution of Galois points for a smooth plane curve in positive characteristic. (2) Generalizing the Klein quartic in characteristic two, I gave a family of curves with at least two Galois points. (3) I showed that Galois points for a certain rational plane curve coincide with rational points over a finite field. (4) As a joint work with Homma and Kim, we showed that the curves in (3) induce good algebraic-geometric codes. (5) As a joint work with Miura, we studied the relationship between Galois points and dual curves (in characteristic zero), and showed that the dual curve of a smooth plane curve does not have a Galois point.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何、ガロア点、正標数、射影代数多様体、射影、ガロア群、ガウス写像

1. 研究開始当初の背景

1996年、吉原久夫氏（新潟大学）は代数幾何学においてガロア点という新たな概念を導入した：射影平面内の平面曲線Cに対し、平面内の点Pからの射影により誘導される関数体の拡大がガロア拡大であるとき、Pを

Cのガロア点という。吉原氏はガロア点がどのような点か説明する際つぎのようについて：「空間に浮かぶ立方体を想像してください。一般の位置に視点をおいてその立体を眺めると何ら対称性は見えませんが、正方形や正六角形など対称性の高い図形が見える特

殊な点があります。ガロア点とはそのような点です。」さらに注釈を加えれば、このような対称性が見える点の分布は立方体の特徴づけているとも言える。ガロア点の研究はこのような古典的な観点とリンクしており、逆にその観点を代数幾何学に持ち込んでいるとも考えられる。

吉原氏は標数零の非特異平面曲線に対してガロア点の分布を完全に決定し、特に、最大個数のガロア点をもつ曲線を完全に決定した。これによりガロア点研究の基本的な方法・ガロア点を用いた分類理論の基盤が確立したといえる。その後ガロア点の概念は、超曲面のガロア点、ガロア部分空間、ガロア埋め込み・・・等、吉原氏自身によって拡張され、発展を遂げた。また、三浦敬氏（宇部高専）は特異曲線へ、高橋剛氏（長岡高専）は特異曲面へ研究を広げた。

正標数においてガロア点分布の研究結果が出始めるのは 2006 年頃である。本間正明氏（神奈川大学）は q 元体上定義された Hermitian 曲線について、ガロア点の集合と射影平面の $q \times q$ 元体有理点の集合とが一致することを示した。その後著者は、正標数において一般の非特異平面曲線を取り扱い、「ある特定の状況を除いて」ガロア点の分布を明らかにした。さらに、標数 2 の Klein 4 次曲線について（適当な座標をとったものは）ガロア点と 2 元体有理点とが一致することも示し、ガロア点と有理点の関係を実証する新たな一例を発見した。

ガロア点研究における重要な成果のひとつは「ガロア点の分布によって射影多様体を分類する」という種類の結果がいくつも得られていることである。例えば吉原氏により、標数零で外ガロア点を最大にもつ非特異超曲面は、Fermat 超曲面になることが証明されている。この観点を発展させ、ガロア点を用いた分類理論として展開することが重要であると思われた。一方、従来のガロア点の研究はガロア点自身或いは関数体の部分体の理論との関係のもと成されるものが主流であったが、本間氏と著者の結果によって、有理点の研究などの別の分野との関係を視野にいった研究も成されるべき時期にさしかかっていた。それが 2010 年ころの状況であった。

2. 研究の目的

以上の背景を踏まえて本研究においては、正標数の視点を用いながら、ガロア点を用いた射影多様体の分類理論を展開し、他分野との関係のなかからガロア点研究の新たな発

展を創出することを目標とした。特に、「ガロア点の分布」という観点から様々な代数多様体を分類すること、及びガロア点と様々な研究分野との関係を見出すこと、を本研究の目的とした。

3. 研究の方法

(1) 平面曲線のガロア点について：平面曲線については、Hurwitz の分岐公式、変曲点の個数の公式とガロア被覆の基本性質を用いた。正標数においてはこれらの扱いはより複雑になる。例えば Hurwitz の公式については different の概念が、変曲点公式については Stohr-Voloch の理論が必要となる。正標数特有の現象に細心の注意を払いながらこれらの手法を用いた。さらに非特異平面曲線のガロア点の分布を考察するのに基本となっている次の考察を用いた：「ガロア点 P と Q があるとき、ガロア点 P により自然に生まれる自己同型が（考えている曲線が非特異であれば）射影変換に拡張されるため、その自己同型によってガロア点 Q を動かす。それによってガロア点を増やすことができる。ひとつのガロア点に対しては複数の変曲点が必要となる為、変曲点の個数の上限によってガロア点の個数を決定する。」

(2) 高次元の超曲面のガロア点について：高次元の多様体のガロア点を解析する際は、超平面切断を考察するという方法をとった。より正確には、考察している射影多様体 X に対して次の条件が成り立つかどうかを考察した：「射影超曲面 X のガロア点 P に対して、 P を通る一般の超平面で切断したとき、 P は再び超平面切断のガロア点となる。」

4. 研究成果

(1) ここ数年の懸案であった「正標数における非特異平面曲線のガロア点の分布を決定せよ」を完全解決した (Rend. Sem. Mat. Univ. Padova に掲載決定済み)。これにより、正標数においても分類理論の基盤が確立されたと言える。例えば Fermat 曲線や Klein 4 次曲線の新たな特徴づけが与えられている。またその際、曲線上のガロア点を複数もつ平面曲線を新たに発見した。

(2) 標数 2 の Klein 4 次曲線を一般化し、「ガロア点を複数もつ」（次数 2 冪の）曲線の族を与え、そのガロア点の分布を明らかにした。また、この曲線の族は Subrao による自己同型に関する研究で有名な曲線を含んでいる。

(3) 標数正のある種の平面有理曲線に対して、ガロア点の集合と射影平面内の q 元体有理点の集合とが一致することを示した。このようにガロア点と有理点の配置が一致する

ような例としては、本間氏の Hermitian 曲線と著者による Klein 4 次曲線に続く第 3 の例である。一方、この曲線と Hermitian 曲線は本間氏と Ballico-Hefez が分類した ‘non-reflexive plane curve of low degree’ という曲線のクラスに属する。そのクラスに属するすべての平面曲線に対して、ガロア点の分布を明らかにした。

以上 3 つの成果において、ガロア点を複数もつ平面曲線が新たに 3 種発見されたことを強調したい。「ガロア点を複数もつ平面曲線」は現在でも 10 種程度しか知られていない。

(4) 研究(3)の平面曲線についてさらに本間氏、Seon Jeong Kim 氏(慶尚大)と共同研究を進め、その曲線上の有理点を用いて構成される代数幾何符号の最小距離を決定した。ある種の符号はグリースマ限界に到達するなど、良い符号を呈することを見出した。ガロア点・有理点・符号の関係が見出された例として大変興味深いと思われる。本研究の目的のひとつ「ガロア点と他分野との関係を見出す」が、符号理論との関係、と言う形で具体的に実現されたと言える。

(5) 三浦敬氏と、ガロア点と双対曲線の関係について共同研究を行った(これは標数零において行った)。「ガロア点をもつ平面曲線の双対曲線がガロア点をもつとき、その平面曲線はどのようなものか?自己双対曲線か?」という問題を提起し、ひとつの結果として「非特異曲線の双対曲線はガロア点をもたない」ことを示した。平面曲線の射影双対性を使うと「上記性質をもつ曲線は特異曲線である」ことが系として得られる。さらにガロア点による自己同型に「射影平面の自己同型に拡張できる」という性質をつけた場合には、自己双対曲線として最も有名な曲線 $x^d - y^e = 0$ として特徴づけられることを示した。以上により、提起した問題に一定の解答を与えた。この研究によりガロア点と双対曲線の新たな関係性が見出されたと言える。

(6) 高次元の超曲面について、ガロア点が超曲面の次元分存在するとき、その定義方程式を完全に決定した。特に、この性質をもつ例は正標数にしか存在しないことがわかる。これは長谷川武博氏(滋賀大学)と著者によって得られた「ガロア点を無限個もつ平面曲線の決定」の高次元化に相当する。

他方、2012年9月15日・16日に本研究課題への補助により「Workshop on Galois point and related topics」(世話人:三浦敬・高橋剛・深澤知)を山形大学理学部において開催した。ガロア点を中心に活発な議論が行わ

れた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- (1) Satoru Fukasawa, Galois points for a non-reflexive plane curve of low degree, *Finite Fields and Their Applications*, 23(2013), 69-79.
DOI: 10.1016/j.ffa.2013.04.003
- (2) Satoru Fukasawa, Masaaki Homma and Seon Jeong Kim, Rational curves with many rational points over a finite field, *Contemporary Mathematics*, 574(2012), 37-48.
DOI: 10.1090/conm/574/11420
- (3) Satoru Fukasawa, Classification of plane curves with infinitely many Galois points, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 63(2011), 195-209.
DOI: 10.2969/jmsj/06310195
- (4) Satoru Fukasawa, On the number of Galois points for a plane curve in positive characteristic, III, *Geometriae Dedicata*, 146(2010), 9-20.
DOI: 10.1007/s10711-009-9422-x

[学会発表] (計10件)

- (1) Satoru Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, 代数・解析・幾何学セミナー, 2013年2月20日, 鹿児島大学理学部
- (2) 深澤知, Ballico-Hefez 曲線上のガロア点, 有理点, 符号, Workshop on Galois point and related topics, 2012年9月16日, 山形大学理学部
- (3) 深澤知, 代数多様体のガロア点の研究とその展開, 長岡高専解析・確率セミナー, 2012年7月12日, 長岡工業高等専門学校
- (4) 深澤知, 非特異平面曲線のガロア点の個数の正標数における完全決定, 日本数学会年会, 2012年3月28日, 東京理科大学理学部
- (5) 深澤知, Galois points for a smooth plane curve in characteristic p, 射影多様体の幾何とその周辺 2011, 2011年11月4日, 高知大学理学部
- (6) 深澤知, Galois points for a smooth plane curve in characteristic p, 代数幾何学シンポジウム-佐渡-, 2011年6月4日, 新潟県佐渡島総合開発センター
- (7) 深澤知, Projective geometry of the

Gauss map in positive characteristic,
都の西北代数幾何学シンポジウム, 2010
年 11 月 13 日, 早稲田大学理工学術院

- (8) Satoru Fukasawa, Galois points for a normal hypersurface, 研究集会「特異点と多様体の幾何学」, 2010 年 9 月 15 日, 山形大学理学部
- (9) 深澤知, 正標数におけるガウス写像の射影幾何, 第 6 回アフィン代数幾何学研究集会, 2010 年 9 月 2 日, 関西学院大学梅田キャンパス
- (10) 深澤知, Galois points for a normal hypersurface I, Workshop on Galois point and related topics, 2010 年 6 月 7 日, 神奈川大学富士見高原研修所

[その他]

ホームページ等

正標数の視点からの射影代数幾何学の研究

<http://www-sci.yamagata-u.ac.jp/seeds/matSeedsFiles/fukasawa.pdf>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

深澤 知 (FUKASAWA SATORU)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号 : 20569496