

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740008

研究課題名（和文）

ゴレンシュタイン局所環上のコーエンマコーレー加群の研究

研究課題名（英文）

Studies of Cohen-Macaulay modules over Gorenstein local rings

研究代表者

高橋 亮 (TAKAHASHI RYO)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：40447719

研究成果の概要（和文）：Punctured spectrum で局所自由な Cohen-Macaulay 加群の構造を精密に調べ、完備化上の Cohen-Macaulay 加群に関する Keller-Murfet-Van den Bergh の結果を回復した。そして、超曲面上の Cohen-Macaulay 加群からなる分解部分圏および特異圏の thick 部分圏を特異軌跡の特殊化閉部分集合によって完全に分類した。応用として、Tor 加群の rigidity に関する Huneke-Wiegand の定理を回復した。

研究成果の概要（英文）：The structure of Cohen-Macaulay modules that are locally free on the punctured spectrum was investigated, and a result of Keller, Murfet and Van den Bergh on Cohen-Macaulay modules over the completion was recovered. The resolving subcategories of Cohen-Macaulay modules over a hypersurface and the thick subcategories of the singularity category were classified completely by using specialization closed subsets of the singular locus. As an application, a theorem of Huneke and Wiegand on the rigidity of Tor modules was recovered.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Gorenstein 環・Cohen-Macaulay 環・Cohen-Macaulay 加群・加群圏・導来圏・特異圏・分解部分圏・thick 部分圏

1. 研究開始当初の背景

私の専門は可換環論である。私は特にその表現論的側面に興味を持って現在まで研究してきた。具体的には、現代の可換環論において中心的な役割を果たしている Gorenstein 環とその拡張概念である Cohen-Macaulay 環を常に眺めながら、可換環上の加群をホモロジー代数を駆使することで考察してきた。以下、環は概ね可換 Noether 環、加群は有限生成加群を意味する。

(1) 全反射加群の研究

全反射加群は、自由加群と Gorenstein 環上の（極大）Cohen-Macaulay 加群の共通の一般化にあたる加群である。Auslander と Bridger が 1960 年代に導入し展開した G 次元と呼ばれる加群の不変量概念が現在まで盛んに研究されてきているが、全反射加群は G 次元が 0 の加群のことである。Avramov-Martinskivsky-Holm の定理により、 G 次元が有限の加群の理解は全反射加群の

理解に帰着する。Gorenstein 環上の加群はみな G 次元が有限なので、全反射加群が理解できれば Gorenstein 環上の加群が理解できることになる。私は、一般の環上で全反射加群を調べることで Gorenstein 環上の加群を知ることを目指し、さまざまな知見を得てきた。

Auslander-Buchweitz の定理は「Gorenstein Hensel 局所環上では、加群圏の中で全反射加群全体のなす部分圏は反変有限である」ということを述べている。これは、Gorenstein 局所環の加群圏は、全反射加群の圏と射影次元が有限な加群の圏の“貼り合わせ”で構成されている、ということの意味を意味していて、その後の可換環論に大きな影響を与えた重要な定理である。私は、この定理の逆に相当する主張「非自由全反射加群を持つ Hensel 局所環は、全反射加群全体のなす部分圏が反変有限ならば Gorenstein である」を証明した。そして「完備局所環が単純特異点であるための必要十分条件は、非自由直既約全反射加群が一個以上かつ有限個であることである」という系を与えた。これは、全反射加群は基礎環の Gorenstein 性に関わらず同様の振舞いをするだろうという大方の予想を覆す結果であり、世界各国の研究者から大きな反響を得た。この他、全反射加群によって近似される加群のなす圏の構造解析、環の特異軌跡の次元による全反射加群の個数評価、滑らかな射影曲線から全反射加群を構成する方法の構築、Eisenbud の行列因子化定理と Knörrer の周期性定理の全反射加群版の構成等を行ってきた。

(2) 全反射加群の部分圏から一般の分解部分圏へ

Abel 圏の分解 (resolving) 部分圏の概念は、1960 年代に Auslander と Bridger が導入した概念である。彼らは、加群圏の中で全反射加群全体のなす部分圏が分解部分圏になることを証明した。Cohen-Macaulay 局所環上の Cohen-Macaulay 加群全体のなす部分圏も分解部分圏であり、分解部分圏の概念は多くの重要な部分圏を包括する概念である。私は全反射加群 (のなす部分圏) の研究で数多く獲得した知見を基にして、一般の分解部分圏の研究を行ってきた。

Auslander と Reiten は大域次元が有限な Artin 多元環の加群圏の反変有限分解部分圏を余傾加群を用いて分類した。これにより反変有限分解部分圏の概念が傾理論と密接な関係にあることがわかり、以来反変有限分解部分圏の概念は多元環の表現論において重要な役割を果たしてきた (なお当該論文は彼らの 100 編以上の論文の中で最も引用されている)。私は任意の Gorenstein Hensel 局所環上の反変有限分解部分圏の完全に分類した。前述の Auslander-Reiten の分類は大域次元の有限性が本質的なので、大域次元の有

限性を仮定しない私の分類は非常に驚くべき結果であると絶賛されている。また、上で述べた Auslander-Buchweitz の定理の逆のより体系的な別証明を副産物として得たことも注目の的となっている。一方、導来圏の thick 部分圏の中で鎖複体がどのように分布しているかを調べた Avramov, Buchweitz, Iyengar, Miller の研究の類似物として、加群圏の分解部分圏の中で加群がどのように分布しているかを調べた。そして、局所環上の分解部分圏には局所自由加群が“稠密”に存在することを示した。この論文のレビューからは「任意の局所環上の任意の分解部分圏に対してこれ程までに強い結果が得られたことは非常に驚きである」との評価を得た。また、この結果を得る上で、高々可算個の加群から成る分解部分圏の非自由軌跡が 1 次元以下であることがわかった。これは Schreyer 予想を解いた Huneke-Leuschke の定理と私が以前書いた論文の主定理を系として与える。(3) その他

Neeman による導来圏の局所部分圏の分類の加群版として加群圏の部分加群と拡大で閉じた部分圏を分類し、Neeman による分類と Gabriel による加群圏の局所部分圏の分類と Krause による加群圏の接続部分圏の分類を一つに統合した。また、多くの重要な環のクラスを含む概念である有限 F 表現型の環上の D 加群に関する先駆的研究を行い、正則環の局所化の D 加群構造に関する Alvarez-Montaner-Blickle-Lyubeznik の定理と正則環上の局所コホモロジーの素因子の有限性に関する Huneke-Sharp の定理を有限 F 表現型の環に拡張した。

2. 研究の目的

主に次の問題に取り組む。

問題 1 Gorenstein 局所環上の Cohen-Macaulay 加群からなる分解部分圏の分類

問題 2 ホモトピー圏による Cohen-Macaulay 安定圏の表示

問題 3 全反射加群の圏が概分裂列をもつ局所環の Gorenstein 性

問題 4 Cohen-Macaulay 局所環上の反変有限分解部分圏の分類

問題 5 有限 F 表現型の環の表現論

3. 研究の方法

(1) 22 年度は問題 1, 2 に取り組む。

① 問題 1 について。この分解部分圏の分類問題は昨年より既に取り組み始めていて、最近超曲面上での分類が完成した。今後はこれを一般の完全交差局所環, Gorenstein 局所環上に拡張することを考える。超曲面のときは、0 次元に落としたときに環が有限表現型になり全ての直既約加群が分類されていること

がキーだった。一般の 0 次元 Gorenstein 環上の直既約加群は分類されていない（できない）ので、別の方法を考える必要がある。そこで、超曲面のときに駆使した局所化を使うことをやめて、良い基底で剰余して 0 次元に落とすことを考える（この方法だと加群の分類がなくても分解部分圏の分類が可能となる）。一方、分解部分圏の分類は素イデアルを用いて行いが、基礎環の素イデアルだけでは少なすぎて全ての分解部分圏を分類できない可能性がある。そこで、拡大環や準同型像を考えて環を膨らませ、素イデアルを増やすことを考える。最近 Iyengar が行った完全交差環上の導来圏の thick 部分圏の分類も Hochschild コホモロジー環の素イデアルを用いたので、効果的な考え方だと考えられる。

② 問題 2 について。現在、特殊線形群の有限部分群の不変式環上の Cohen-Macaulay 次数加群の安定圏の考察を行っている。現在までにその圏の傾対象の構成に成功し、その圏がその傾対象の自己準同型環の射影加群の有界複体のホモトピー圏と三角同値になることを証明した。今後はより一般の次数付き Gorenstein 環上で同様のことができないか考える。ホモトピー圏や導来圏の thick 部分圏の分類については多くの研究があるため、この問題の考察を通して得られた知見は問題 1 の解決にも繋がることを期待される。

(2) 23 年度以降は問題 3～5 に取り組む。

① 問題 3 について。概分裂列は、現代の多元環の表現論において中心的な役割を果たしている Auslander-Reiten 理論で主役を担う完全列である。孤立特異点を持つ Cohen-Macaulay 完備局所環上の Cohen-Macaulay 加群の圏は概分裂列を持ち (Auslander), 概分裂列を持つ加法圏の反変有限部分圏は概分裂列を持ち (Auslander-Smalø), 全反射加群の圏が Cohen-Macaulay 加群の圏の中で反変有限になる局所環は Gorenstein である。そこで、「全反射加群の圏が概分裂列を持つ局所環は Gorenstein か?」という問題を考える。全反射加群の圏は Frobenius 圏なのでその安定圏は三角圏になる。全反射加群の圏が概分裂列を持つことは全反射加群の安定圏が概分裂三角を持つことと同値であり、それは全反射加群の安定圏が Serre 関手を持つことと同値であり (Reiten-Van den Bergh), それはさらに任意の全反射加群の正準双対が全反射加群による近似を持つことと同値になることが現在までにわかっている。特徴的な全反射加群を色々用意しそれらの正準双対が全反射加群による近似を持つ条件を考察し、問題の解決を試みる。

② 問題 4 について。反変有限分解部分圏の分類は Gorenstein Hensel 局所環上では完全に成し遂げられたが、一般の Cohen-Macaulay

Hensel 局所環上では、ある特定の加群を含む反変有限分解部分圏の分類しかまだできていない。一般の Cohen-Macaulay Hensel 局所環上の反変有限分解部分圏を分類することができればそれだけで重要な成果であるが、直既約加群を有限個しか含まない部分圏という特別な反変有限部分圏に対する応用も見込まれる。その特定の加群を含むという条件を外すこと、あるいは別のより自然な条件に置き換えることを考えていく。

③ 問題 5 について。有限 F 表現型の環上の D 加群については強い結果を得ることができたが、有限 F 表現型の環の概念が有限 Cohen-Macaulay 表現型の Cohen-Macaulay 局所環の概念の拡張であるように、そこには表現論的な側面が必ずあると私は信じている。すなわち、有限 F 表現型の環の加群圏は何らかの“有限性”を持っているはずであり、それを見出すことができればそこから正標数の可換環の表現論が展開されることが期待される。その“有限性”を探るべく、まずは正標数の有限 Cohen-Macaulay 表現型の Cohen-Macaulay 局所環について、Frobenius 写像を複数回合成した写像を通して元の環を見たときの加群構造を調べる。特に、その加群の直和因子に全ての直既約 Cohen-Macaulay 加群が現れるのかどうかをはっきりさせたい。これが肯定的にわかれば、その加群の自己準同型環の大域次元の有限性 (戸田-安田の結果の拡張) が従い、その有限 F 表現型の環への拡張も期待される。一方、有限 F 表現型の環の研究はまだ始まったばかりであり、先行結果が少ない。そこで、有限 F 表現型の環自体の問題にも取り組み、そこから本目的に歩み寄ることも併せて考える。具体的には、有限 F 表現型の Fermat 型超曲面を特徴付けること、また有限 F 表現型という性質が極小素因子による剰余で保たれるかどうか、行列式環は常に有限 F 表現型になるかどうかを解明することを目指す。

4. 研究成果

部分圏の分類研究は 1960 年代の Gabriel による加群圏の Serre 部分圏の分類に始まり、近年では私と Krause による加群圏の wide 部分圏の分類などがある。三角圏についてはとりわけ thick 部分圏の分類研究が盛んである。Deinatz-Hopkins-Smith が p 局所安定ホモトピー圏のコンパクト対象からなる thick 部分圏を分類した後、Hopkins と Neeman が可換 Noether 環上の完全複体の導来圏の thick 部分圏を分類し、Thomason がこれをスキームに拡張した。Benson-Carlson-Rickard は有限 p 群の有限次元表現の安定圏の thick 部分圏を分類し、Friedlander-Pevtsova がこれを有限群スキームに、Benson-Iyengar-Krause が導来圏に拡張した。このように部分圏の分類は

環論・ホモトピー論・代数幾何学・モジュラー表現論が共有する研究テーマであり、分野間の交流を通して活発に研究されている。

私は、以前考察して得た非自由軌跡および分解閉包に関する結果を用いて、punctured spectrum で局所自由な Cohen-Macaulay 加群の構造を精密に調べた（これにより完備化上の Cohen-Macaulay 加群に関する Keller-Murfet-Van den Bergh の定理が回復された）。そして超曲面局所環上の Cohen-Macaulay 加群からなる分解部分圏を、特異軌跡の特殊化閉部分集合によって分類した。さらにそれを用いて、超曲面局所環の特異圏の thick 部分圏を分類した。これは前述の Benson-Carlson-Rickard の定理の高次元版の一部を形成するものであり注目を集めた。応用として、Tor 加群の rigidity に関する Huneke-Wiegand の定理を回復し、加群圏の thick 部分圏のうち自由加群を含むもの、導来圏の thick 部分圏のうち完全複体を含むものを完全に分類した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

以下すべて査読有り

1. R. Takahashi; D. White, Homological aspects of semidualizing modules, Math. Scand. 106 (2010), no. 1, 5--22. (<http://www.msand.dk/issue.php?year=2010&volume=106&issue=1>)
2. R. Takahashi; S. Yassemi; Y. Yoshino, On existence of embeddings into modules of finite homological dimensions, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 7, 2265--2268. (DOI: 10.1090/S0002-9939-10-10323-2)
3. R. Takahashi, Classifying thick subcategories of the stable category of Cohen-Macaulay modules, Adv. Math. 225 (2010), no. 4, 2076--2116. (DOI: 10.1016/j.aim.2010.04.009)
4. R. Takahashi, When is there a non-trivial extension-closed subcategory?, J. Algebra 331 (2011), no. 1, 388--399. (DOI: 10.1016/j.jalgebra.2010.12.023)
5. R. Takahashi, Contravariantly finite resolving subcategories over commutative rings, Amer. J. Math. 133 (2011), no. 2, 417--436. (DOI: 10.1353/ajm.2011.0011)
6. T. Araya; K.-i. Iima; R. Takahashi, On the structure of Cohen-Macaulay modules over hypersurfaces of countable Cohen-Macaulay representation type, J. Algebra 361 (2012), 213--224. (DOI: 10.1016/j.jalgebra.2012.03.032)
7. T. Araya; K.-i. Iima; R. Takahashi, On the left perpendicular category of the modules of finite projective dimension, Comm. Algebra 40 (2012), no. 8, 2693--2699. (DOI: 10.1080/00927872.2011.584926)
8. R. Takahashi, Classifying resolving subcategories over a Cohen-Macaulay local ring, Mathe. Z. 273 (2013), no. 1, 569--587. (DOI: 10.1007/s00209-012-1020-1)
9. R. Takahashi, Thick subcategories over Gorenstein local rings that are locally hypersurfaces on the punctured spectra, J. Math. Soc. Japan (印刷中).
10. O. Iyama; R. Takahashi, Tilting and cluster tilting for quotient singularities, Math. Ann. (印刷中).
11. O. Celikbas; H. Dao; R. Takahashi, Modules that detect finite homological dimensions, Kyoto J. Math. (印刷中).
12. O. Celikbas; R. Takahashi, Auslander-Reiten conjecture and Auslander-Reiten duality, J. Algebra (印刷中).
13. J. Burke; L. W. Christensen; R. Takahashi, Building modules from the singular locus, Math. Scand. (印刷中).

[学会発表] (計 48 件)

1. 高橋 亮, Classifying thick subcategories of derived categories, 名古屋大学セミナー, 名古屋大学, 2010 年 4 月 20 日.
2. 高橋 亮, テンソル閉分解部分圏の分類, 岡山大学セミナー, 岡山大学, 2010 年 6 月 14 日.
3. 高橋 亮, 加群圏とその有界導来圏の稠密部分圏の分類について, 岡山大学セミナー, 岡山大学, 2010 年 6 月 14 日.
4. 高橋 亮, Auslander-Bridger 近似と Cohen-Macaulay 近似, 第 1 回大和郡山セミナー, 奈良工業高等専門学校, 2010 年 7 月 3 日.
5. 高橋 亮, 剰余体のシジジーを含む分解部分圏の分類, 明治大学可換環論セミナー, 明治大学, 2010 年 7 月 24 日.
6. Ryo Takahashi, Classifying thick subcategories over a hypersurface, XIV International Conference on

- Representations of Algebras (ICRA), National Olympics Memorial Youth Center (NYC), August 12, 2010.
7. Ryo Takahashi, Resolving subcategories and the punctured spectrum, Commutative Algebra Seminar, University of Nebraska-Lincoln, USA, September 8, 2010.
 8. Tokuji Araya; Kei-ichiro Iima; Ryo Takahashi, Modules left orthogonal to modules of finite projective dimension, The 43rd Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Naruto University of Education, September 10, 2010.
 9. Ryo Takahashi, Some classifications of resolving subcategories, Test problems for the theory of finite dimensional algebras, Banff International Research Station, Canada, September 16, 2010.
 10. 荒谷 督司; 飯間 圭一郎; 高橋 亮, 直交部分圏と局所環の性質, 日本数学会代数学分科会, 名古屋大学, 2010年9月22日.
 11. 高橋 亮, Cohen-Macaulay 局所環上の分解部分圏の分類, 日本数学会代数学分科会特別講演, 名古屋大学, 2010年9月22日.
 12. 高橋 亮, 有限生成加群の有界導来圏の次元の下限について, 第4回岡山大学環論セミナー, 岡山大学, 2010年11月1日.
 13. Ryo Takahashi, Classifying resolving subcategories over a Cohen-Macaulay local ring, The 32nd Symposium on Commutative Ring Theory and the 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 生産性国際交流センター, 2010年12月15日.
 14. 高橋 亮, Knoerrer の周期性に関する一つの注意, 第5回岡山大学環論セミナー, 岡山大学, 2011年2月11日.
 15. 高橋 亮, 完備局所環の導来圏の次元の有限性, 第5回岡山大学環論セミナー, 岡山大学, 2011年2月13日.
 16. Ryo Takahashi, Dimensions of derived categories of commutative rings, Commutative Algebra Seminar, University of Nebraska-Lincoln, USA, March 29, 2011.
 17. Ryo Takahashi, Dimensions of derived categories of commutative rings, Homological days 2011, University of Kansas, Lawrence, Kansas, USA, May 5, 2011.
 18. Takuma Aihara; Ryo Takahashi, Dimensions of derived categories, The 44th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Okayama University, September 26, 2011.
 19. 相原 琢磨; 高橋 亮, 導来圏の次元の有限性, 日本数学会代数学分科会, 信州大学, 2011年9月28日.
 20. Ryo Takahashi, Dimensions of derived categories and singularity categories, AMS 2011 Fall Central Sectional Meeting, Special Session on Local Commutative Algebra, University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, Nebraska, USA, October 16, 2011.
 21. 高橋 亮, 可換環の加群圏とそれに付随する三角圏, 談話会, 名古屋大学, 2011年10月20日.
 22. Ryo Takahashi, Dimensions of resolving subcategories, Mini Workshop, Nagoya University, October 22, 2011.
 23. Shiro Goto; Ryo Takahashi; Kazuho Ozeki, Ulrich modules - a generalization, The 33rd Symposium on Commutative Ring Theory, 浜名湖カリアック, November 8, 2011.
 24. Ryo Takahashi, Finiteness of dimensions of resolving subcategories, Commutative Algebra Seminar, University of Nebraska-Lincoln, USA, November 9, 2011.
 25. Ryo Takahashi, Dimensions of resolving subcategories over Cohen-Macaulay local rings, Algebra seminar, University of Missouri, USA, November 14, 2011.
 26. Ryo Takahashi, Classifying subcategories over Cohen-Macaulay rings, Colloquium, University of Missouri, USA, November 17, 2011.
 27. Ryo Takahashi, Classification problems of subcategories, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), Tehran, Iran, November 27-29, 2011 [3 lectures].
 28. Ryo Takahashi, Bounds for dimensions of derived and singularity categories, 8th Seminar on Commutative Algebra and Related Topics, School of Mathematics, IPM, Tehran, Iran, November 30, 2011.
 29. Ryo Takahashi, Dimensions of resolving subcategories, Commutative Algebra Seminar, University of Isfahan, Isfahan, Iran, December 3, 2011.
 30. Ryo Takahashi, Finiteness of dimensions of derived categories, The 7th Japan-Vietnam Joint Seminar on Com-

- mutative Algebra, Qui Nhon University, Quy Nhon, Vietnam, December 15, 2011.
31. 高橋 亮, Auslander-Reiten 双対について, 信州大学セミナー, 信州大学, 2012年2月28日.
 32. Ryo Takahashi, Resolving subcategories of modules of finite projective dimension, 名古屋大学セミナー, 名古屋大学, 2012年3月1日.
 33. 相原 琢磨; 荒谷 督司; 伊山 修; 高橋 亮; 吉脇 理雄, Functor categories and derived dimensions, 第17回代数学若手研究会, 静岡大学, 2012年3月4日.
 34. 後藤 四郎; 大関 一秀; 高橋 亮, Ulrich 加群の一般化について, 日本数学会代数学分科会, 東京理科大学, 2012年3月26日.
 35. 後藤 四郎; 大関 一秀; 高橋 亮, Ulrich 加群の極小自由分解について, 日本数学会代数学分科会, 東京理科大学, 2012年3月26日.
 36. Hailong Dao; Ryo Takahashi, The dimension and radius of a subcategory of modules, Singularities in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2012 AMS Spring Central Sectional Meeting, University of Kansas, Lawrence, Kansas, USA, March 30, 2012.
 37. Ryo Takahashi, Dimensions of derived categories and analogues for module categories, Commutative Algebra and its Interactions with Algebraic Geometry, Representation Theory, and Physics, Pan-American Advanced Study Institute (PASI), CIMAT, Guanajuato, Mexico, May 25, 2012.
 38. Ryo Takahashi, Classifying resolving subcategories by grade consistent functions, XV International Conference on Representations of Algebras (ICRA), Universität Bielefeld, Bielefeld, Germany, August 17, 2012.
 39. 高橋 亮, Gorenstein ホモロジー代数入門, 第57回代数学シンポジウム, 京都大学, 2012年8月20日.
 40. 相原 琢磨; 荒谷 督司; 伊山 修; 高橋 亮; 吉脇 理雄, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories, 日本数学会代数学分科会, 九州大学, 2012年9月20日.
 41. Ryo Takahashi, Getting a module from another and classifying resolving subcategories, The 34th Symposium on Commutative Ring Theory, IPC 生産性国際交流センター, November 22, 2012.
 42. Shiro Goto; Kazuho Ozeki; Ryo Takahashi; Kei-ichi Watanabe; Ken-ichi Yoshida, Ulrich ideals and modules of 2-dimensional rational singularities, I, The 34th Symposium on Commutative Ring Theory, IPC 生産性国際交流センター, November 24, 2012.
 43. Shiro Goto; Kazuho Ozeki; Ryo Takahashi; Kei-ichi Watanabe; Ken-ichi Yoshida, Ulrich ideals and modules of 2-dimensional rational singularities, II, The 34th Symposium on Commutative Ring Theory, IPC 生産性国際交流センター, November 24, 2012.
 44. Ryo Takahashi, Building Cohen-Macaulay modules from a single module, Commutative Algebra Colloquium, Mathematical Sciences Research Institute (MSRI), USA, January 23, 2013.
 45. Ryo Takahashi, Uniform annihilation of Ext modules and generation of derived categories, Eisenbud Seminar, University of California, Berkeley, USA, February 5, 2013.
 46. 高橋 亮, Ext 関手の一様零化と導来圏の生成, 岡山大学可換環論セミナー, 岡山大学, 2013年3月9日.
 47. 後藤 四郎; 大関 一秀; 高橋 亮; 渡辺 敬一; 吉田 健一, 2次元有理特異点上の Ulrich イデアル, 加群, 日本数学会代数学分科会, 京都大学, 2013年3月20日.
 48. 相原 琢磨; 荒谷 督司; 伊山 修; 高橋 亮; 吉脇 理雄, Dimensions of triangulated categories with respect to subcategories 2, 日本数学会代数学分科会, 京都大学, 2013年3月21日.
- 〔図書〕 (計1件)
高橋 亮, 雑誌「数理科学」, サイエンス社, 2012年8月号, 特集「導来圏をめぐって」, 14~20ページ.
- 〔その他〕
 ホームページ
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~takahashi/>
6. 研究組織
 (1) 研究代表者
 高橋 亮 (TAKAHASHI RYO)
 名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
 研究者番号: 40447719