

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月23日現在

機関番号：13903

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22740010

研究課題名（和文）代数体の制限分岐ガロア拡大の岩澤理論とその応用

 研究課題名（英文）Iwasawa theory for Galois extensions of number fields  
with restricted ramification and its applications

研究代表者

水澤 靖 (MI ZUSAWA YASUSHI)

名古屋工業大学・工学研究科・准教授

研究者番号：60453817

研究成果の概要（和文）：代数体の制限分岐ガロア拡大は、高次の整数に対する一意な素因数分解の難しさなど、整数論における重要な情報を多く含む。それらに関する岩澤理論的な未解決問題と、制限分岐ガロア拡大の非可換構造との関係性を研究し、新たな明示的具体例を与えた。また、未解決予想の新たな根拠を探るため、結び目理論における類似問題を研究した。

研究成果の概要（英文）：Galois extensions of number fields with restricted ramification contain a lot of important information in number theory, for example the difficulty of unique prime factorization of higher dimensional integers. We studied the relationship between a related open problem in Iwasawa theory and non-commutative structure of the Galois extensions, and we gave new explicit examples. Moreover, we studied an analogous problem in knot theory in order to obtain new evidence of an unsolved conjecture.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数体・岩澤理論・ガロア群

## 1. 研究開始当初の背景

岩澤理論は各素数  $p$  に対して、代数体の  $\mathbb{Z}_p$  拡大におけるイデアル類群の  $p$  シロー部分群の成長を記述することから始まり、様々な対象を扱う理論に発展してきている。その一方で、古典的な未解決予想も多く残されており、特に「総実代数体に対しては、その  $p$  シロー部分群の成長が有限」と主張するグリーンバーグ予想は、様々な肯定的具体例が知られて

いるものの、現在でも一般には未解決である。

そこで研究代表者らは、非可換な不分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群に着目し、その構造を岩澤理論の視点から捉えることで、そのアーベル商であるイデアル類群の構造を解明すべく研究を進めてきた。特に研究代表者は、分岐条件を緩めた馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群の非可換構造を扱い、その不分岐部分商であるイデアル類群との関係を研究してきた。その成果として、グリーンバーグ予想の新たな肯定的具体

例が得られたものの、馴分岐を扱う場合においても、その予想などに起因する困難が生じており、それらの未解決問題の解決を視野に入れた、新たな発展的アプローチが不可欠となってきた。

## 2. 研究の目的

以上の背景をふまえ、当研究課題では、困難の原因であるグリーンバーグ予想などの未解決問題を、より一般の制限分岐 $\text{pro-}p$ ガロア拡大において捉えなおすことを試みた。特に、そのガロア群の非可換構造の中で、グリーンバーグ予想とその類似問題を一般化・定式化し直し、その部分的解決を目指すことで、予想が肯定的と考えられる根拠の本質を見抜くことを目標とした。

また、その部分的解決から期待できることとして、得られた結果や研究手法を、様々な岩澤理論的不変量の計算に応用することも目標とした。

## 3. 研究の方法

制限分岐 $\text{pro-}p$ ガロア群として、より一般の馴分岐 $\text{pro-}p$ ガロア群を主に扱い、その部分商である不分岐 $\text{pro-}p$ ガロア群の大きさを評価することで、その非可換構造とグリーンバーグ予想にアプローチした。その研究では、計算機による数値実験も有効であり、そこで得られたデータから、成り立つべき定理を予想として定式化した。それを基に、文献購読などで必要な情報を整理し、証明してゆく方法で、研究を遂行した。

また、グリーンバーグ予想の一般化に関して、それを予想として捉えるに足る十分な具体例が、従来の研究の中で既に得られていることを、研究協力者からの知識提供により発見したため、その次の段階として研究計画の修正を行った。そこで、数論的トポロジーにおける類似問題を考察するため、制限分岐 $\text{pro-}p$ ガロア群の類似である絡み目群、および $\mathbf{Z}_p$ 拡大の類似である絡み目の巡回分岐被覆の無限列に対して、岩澤理論の研究手法を応用した。

さらに、非可換な制限分岐 $\text{pro-}p$ ガロア拡大に関して、最先端の研究成果を応用すべく、セミナーや研究集会における資料情報収集を行った。

## 4. 研究成果

(1) 有理数体の円分 $\mathbf{Z}_p$ 拡大(基本 $\mathbf{Z}_p$ 拡大)上の馴分岐 $\text{pro-}p$ ガロア拡大に対して、以下の定理を証明し、共著の雑誌論文①において発表した。

**定理 1.** 奇素数  $p$  を法として 1 と合同かつ  $p^2$  を法として 1 と合同でない 2 つの奇素数からなる集合を  $S$  とし、有理数体の最大  $S$  外不分岐基本アーベル  $p$  拡大体を  $k$  とする。このとき、 $k$  の円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大の岩澤不変量がすべて 0 ならば、有理数体の円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大上の最大  $S$  外不分岐  $\text{pro-}p$  拡大体に対して、その有理数体上のガロア群は、次の関係式をみたす 3 つの位相的生成元  $a, b, c$  をもつ： $(a^p)^p=1$ ,  $b^{-1}ab=a^{1+p}$ ,  $ac=ca$ ,  $c^{-1}bc=b^{1+pa^p}$

**定理 2.** 8 を法として 5 と合同な 2 つの奇素数からなる集合を  $S$  とし、その 2 つの奇素数の平方根を有理数体に添加して得られる 4 次体を  $k$  とする。このとき、 $k$  の円分  $\mathbf{Z}_2$  拡大上に不分岐 2 次拡大が存在するならば、有理数体の円分  $\mathbf{Z}_2$  拡大上の最大  $S$  外不分岐  $\text{pro-}2$  拡大体に対して、その有理数体上のガロア群は、次の関係式をみたす 3 つの位相的生成元  $a, b, c$  をもつ： $a^4=1$ ,  $b^{-1}ab=a^{-1+L}$ ,  $ac=ca$ ,  $c^{-1}bc=b^5a^{2z}$ ,  $M$  と  $L$  は  $4 \leq L \leq M \leq 4L$  をみたす 2 の冪、 $z$  は整数

これらの定理は、 $\mathbf{Z}_p$  拡大のガロア群の非可換ガロア群への作用が明示的な、新たな具体例を与えており、今後の非アーベル岩澤理論の発展に貢献する結果と考えられる。また、グリーンバーグ予想が成り立つ様子と馴分岐 $\text{pro-}p$ ガロア群の非可換構造との関係が、 $p$  の偶奇によって異なることも示している。

(2) 派生した共同研究として、円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大上の馴分岐アーベル  $\text{pro-}p$  ガロア群(馴分岐岩澤加群)の自由階数の明示公式を与える研究を進めてきたが、そこでも  $p$  の偶奇によって状況が大きく異なることが判明した。その過程において、次の定理を導いた。

**定理 3.** 5 つの奇素数 3, 5, 7, 31, 79 からなる集合  $S$  に対して、有理数体の  $S$  分岐 2-類体塔は無限である一方で、有理数体の円分  $\mathbf{Z}_2$  拡大上の  $S$  分岐岩澤加群は有限である。

この定理は、グリーンバーグ予想型の現象と  $p$ -類体塔の有限性との関係性に関する新たな具体例であり、学会発表③の成果とともに発表した。また、これらの成果は、論文として欧文雑誌に投稿中である。

(3) 定理 1 の部分的拡張として、次の定理を証明し、共著の報告文③および学会発表②において発表した。

**定理 4.** 奇素数  $p$  を法として 1 と合同な奇素数からなる集合を  $S$  に対して、有理数体の最大  $S$  外不分岐基本アーベル  $p$  拡大体を  $k$  とし、 $k$  の円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大上の不分岐アーベル  $\text{pro-}p$  ガ

ロア群 (不分岐岩澤加群) を  $X$  とする。このとき、有理数体の円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大上の最大  $S$  外不分岐  $\text{pro-}p$  拡大  $L$  のガロア群がメタ巡回群であるための必要十分条件は、次の条件のいずれかが成り立つことである。

(i)  $S$  は 1 つの素数からなり、 $X$  の位数は高々  $p$  である。

(ii)  $S$  は 2 つの素数からなり、 $X$  の位数は 1 である。

岩澤加群  $X$  の位数に関する条件は、 $p$  冪剰余記号や  $p$  進  $L$  関数の特殊値などの計算可能な不変量を用いて記述できる。これにより、 $p$  が奇素数である状況においては、有理数体の円分  $\mathbf{Z}_p$  拡大上の馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群がメタ巡回群である場合が完全に分類されたことになる。特に定理の条件をみたまつ場合には、 $L$  の任意の部分体に対して、グリーンバーグ予想が肯定的であることが導かれ、予想が肯定的な非アーベル体の新たな具体例も与えたことになる。この成果は、馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群とその不分岐部分商との結びつきを具体的に表しており、その非可換構造とグリーンバーグ予想との関係から、予想の根拠を探るための重要な手がかりになると思われる。これらの成果も、論文として欧文雑誌に投稿中である。

(4) 結び目理論の研究者との共同研究として、3次元球面内の絡み目の  $p$  冪次巡回分岐被覆の岩澤不変量  $\lambda$ ,  $\mu$  がとり得る値を、ほぼ完全に決定し、共著の雑誌論文②および学会発表①において発表した。そこでも素数  $p$  の偶奇の違いが大きく影響し、岩澤多項式およびアレクサンダー多項式の性質に関して、新たな知見も与えるものと思われる。また、絡み数と冪剰余記号の類似性に関する新たな具体例も導き、それを基に、絡み目の分岐被覆におけるグリーンバーグ予想の類似問題を提起、考察した。その研究から、馴分岐でない制限分岐ガロア拡大においては、絡み目の成分数の類似として、虚な無限素点の個数を考慮すべきことが判明した。特に、総実代数体における素数  $p$  の成分数は 1 であるとみなした場合、結び目に対しては  $\lambda$ ,  $\mu$  が常に 0 であることが、グリーンバーグ予想の類似として成り立っていると解釈できる。厳密な類似ではないものの、グリーンバーグ予想の根拠を探る手がかりになると期待される。

以上の研究成果は、国内のセミナーや研究集会においても発表しており、今後の発展への貢献が期待できる。他の不変量の計算への十分な応用は得られていないが、グリーンバーグ予想に関連してある程度の結果が得ら

れたという点では、当研究課題の目的として、一応の満足のいく成果が得られたと思われる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① 水澤靖, 尾崎学, On tame  $\text{pro-}p$  Galois groups over basic  $\mathbf{Z}_p$ -extensions, *Mathematische Zeitschrift*, 査読有, vol. 273, no. 3, 2013, 1161-1173. DOI: 10.1007/s00209-012-1048-2
- ② 門上晃久, 水澤靖, On the Iwasawa invariants of a link in the 3-sphere, *Kyushu Journal of Mathematics*, 査読有, vol. 67, no. 1, 2013, 215-226. DOI: 10.2206/kyushujm.67.215
- ③ 伊藤剛司, 水澤靖, 基本  $\mathbf{Z}_p$  拡大上の馴分岐  $\text{pro-}p$  拡大について, 第 6 回福岡整数論研究集会報告集, 査読無, 2012, 109-114. <http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~ykihishi/FSNT/11/010-Ito-Mizusawa.pdf>

[学会発表] (計 3 件)

- ① 門上晃久, 水澤靖, Iwasawa invariants of cyclic branched covers of links, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会代数学分科会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学伊都キャンパス.
- ② 伊藤剛司, 水澤靖, 基本  $\mathbf{Z}_p$  拡大上の馴分岐  $\text{pro-}p$  拡大について, 日本数学会 2012 年度年会代数学分科会, 2012 年 3 月 29 日, 東京理科大学神楽坂キャンパス.
- ③ 伊藤剛司, 水澤靖, 尾崎学, 基本  $\mathbf{Z}_p$  拡大の馴分岐岩澤加群について, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会代数学分科会, 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学.

[その他]

ホームページ等

<http://kaken.nii.ac.jp/d/p/22740010.ja.html>

<http://kaken.nii.ac.jp/d/p/22740010.en.html>

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

水澤 靖 (MI ZUSAWA YASUSHI)  
名古屋工業大学・工学研究科・准教授  
研究者番号：6 0 4 5 3 8 1 7

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし