

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 23 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22740013

研究課題名(和文)位相的弦理論の研究

研究課題名(英文)Study of the topological string theory

研究代表者

小西 由紀子 (Konishi, Yukiko)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：30505649

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究ではフロベニウス構造の一般化と局所ミラー対称性の定式化を目標とした。ミラー対称性ではBモデルはpureホッジ構造で記述されるのに対して局所ミラー対称性ではBモデルは混合ホッジ構造で記述される。このことに着目して接ベクトル束がフィルトレーションを持つようにフロベニウス構造を一般化し、混合フロベニウス構造と名付けた。さらに局所Aモデルの混合フロベニウス構造を明らかにした。具体的には、非特異射影多様体と凹ベクトル束の組に対し、ツイストされた同変量子コホモロジーの極限と同変内積を考えることによってコホモロジー上に混合フロベニウス構造が定まることを示した。これらの結果は三鍋聡司氏との共同研究である。

研究成果の概要(英文)：The objectives of the research are the generalization of the notion of Frobenius structure and the formulation of local mirror symmetry. Noticing that the B-model of the local mirror symmetry is described in terms of the mixed Hodge structure whereas that of the mirror symmetry is described in terms of the pure Hodge structure, we generalized the definition of Frobenius structure to the case where the tangent bundle has a filtration and named it the mixed Frobenius structure(MFS). Moreover we constructed a MFS for local A-model. More precisely, for a pair of a nonsingular projective variety and a concave vector bundle, we constructed a MFS by considering the nonequivariant limit of the twisted equivariant quantum cohomology and twisted pairing. These results are obtained in a joint work with Satoshi Minabe.

研究分野：代数幾何学・数理物理

キーワード：ミラー対称性 フロベニウス多様体 量子コホモロジー 混合ホッジ構造

1. 研究開始当初の背景

局所ミラー対称性は4次元トーリック多様体のカラビヤウ超曲面のミラー対称性のある「極限」として発見された [Katz-Klemm1994][Chiang-Klemm-Yau-Zasolow'98]. その主張は16個ある2次元反射的多面体 についての間の関係として述べる事ができる:

の原点以外の格子点によって1次元錐が生成されるトーリック扇を とする. 対応する弱ファノトーリック曲面 S の種数ゼロ局所グロモフ・ウィッテン(GW)不変量, つまり標準束でツイストした同変 GW 不変量の nonequivariant 極限の生成母関数。(トーリック曲面 S と局所 GW 不変量を指して局所 A 模型と呼ぶ.)

に付随する GKZ 超幾何微分方程式系

2次元複素トーラス T と をニュートン多面体とする2変数ローラン多項式 f の定めるアフィン曲線 C の相対コホモロジー $H^2(T, C)$ 上の混合ホッジ構造の変動. (アフィン曲線と相対コホモロジー $H^2(T, C)$ を指して局所 B 模型と呼ぶ.)

トーリック多様体のカラビヤウ超曲面の場合と同様に の解を用いて の生成母関数を表す事ができる [Coates-Givental]. また の周期積分の満たす微分方程式系が の GKZ 超幾何系である [Batyrev 1993, Konishi-Minabe2010]. また の S のコホモロジーと の相対コホモロジーはベクトル空間として同型である [Stienstra 1999].

A 模型側 (GW 不変量側) の量子コホモロジーによって定まるフロベニウス構造 [Kontsevich-Manin 1994] と, B 模型側のホッジ構造によって定まるフロベニウス構造 [Barannikov - Kontsevich 98, Barannikov 2003] が同型であるべきというものである.

フロベニウス構造 [Dubrovin 1993] は多様体の接ベクトル束上の構造で, 可換フロベニウス代数の構造 (積と積不変な非退化双線形形式 (以下内積という)) と, 次数付き環の構造を与えるベクトル場 E (オイラーベクトル場) であって, レビチビタ接続の平坦性ほかの複数の整合性条件を満たすものである. その重要な例には以下のものが挙げられる.

- (a) 非特異射影多様体の量子コホモロジー (交差形式と量子カップ積) [Kontsevich-Manin 1994]
- (b) dGBV 代数のコホモロジー上のフロベニウス構造 [Barannikov - Kontsevich

1999, Manin 1999]

- (c) コクセター群の軌道空間上のフロベニウス構造 [K.Saito, Dubrovin]
- (d) 孤立特異点の普遍変形の空間上のフロベニウス構造 [K.Saito]

カラビヤウ多様体のミラー対称性は A 模型側のフロベニウス構造 (a) と B 模型側の多重ベクトル場と微分形式のなす dGBV 代数によるフロベニウス構造 (b) の同値として定式化することができる [Barannikov 2003].

局所ミラー対称性も同様に定式化できると期待される. しかしミラー対称性と違って「自然な」内積が存在しないためにフロベニウス構造とならないことが大きな問題であった.

2. 研究の目的

そこで, 本研究ではフロベニウス構造の一般化とそれによる局所ミラー対称性の定式化を目標とした.

3. 研究の方法

ミラー対称性の B 模型側は pure なホッジ構造で記述されるのに対して, 局所ミラー対称性の B 模型側は混合ホッジ構造で記述される. したがって, ホッジ構造の混合ホッジ構造への一般化を真似てフロベニウス構造を一般化しようと試みた.

4. 研究成果

混合フロベニウス構造の定義

まずフロベニウス代数を一般化した混合フロベニウス代数を, 可換結合代数, そのイデアルによるフィルトレーションと積で不変な逐次商上の内積の組として定義した. このフィルトレーションは混合ホッジ構造のウェイトフィルトレーションを真似したものである. 次に混合フロベニウス構造を, 多様体の接ベクトル束上の混合フロベニウス代数の構造と, 平坦接続, オイラーベクトル場の組として定義した.

フロベニウス構造の理論においては Dubrovin 接続が重要である. そのため混合フロベニウス構造にも Dubrovin 接続が存在するように構成した. フロベニウス構造は計量なしの齋藤構造 (この言葉は Sabbah による) と整合的な計量の組にはかならないが, Dubrovin 接続は計量なし齋藤構造から定まるものである. そこで混合フロベニウス構造も計量なしの齋藤構造とそれに整合的なフィルトレーション, 逐次商上の内積となるように定義を与えた.

局所 A 模型の混合フロベニウス構造

局所 A 模型の混合フロベニウス構造を次の 2 とおりの方法で構成した。

- (1) トーリック曲面 S の標準束の射影コンパクト化 X の量子コホモロジーを用いる方法： $H^*(X)$ の "余計" なノビコフ変数のある極限をとって積を構成し、またある冪零写像に柏原の構成 [1986] を用いてフィルトレーションと内積を構成した。このフィルトレーションは、 S のコホモロジーと対応するアフィン曲線 C の相対コホモロジー $H^2(T, C)$ の同型のもとで、 $H^2(T, C)$ のウェイトフィルトレーションと一致することも示した。
- (2) S の標準束でツイストされた同変量子コホモロジーを用いる方法：nonequivariant 極限として積が定義できる。また同変内積の極の次数によってコホモロジー上にフィルトレーションと内積を構成した。結果はフィルトレーションの次数のずれを除いて(1)と一致する。ただし(2)の方法は一般の非特異射影多様体の凹ベクトル束の場合にも使える、より一般的な手法である。

以上の結果は三鍋聡司（東京電機大）との共同研究であり、以下の 2 本の論文にまとめて投稿中である。

[1] Yukiko Konishi, Satoshi Minabe, "Local quantum cohomology and Mixed Frobenius structure", arXiv:1405.7476

[2] Yukiko Konishi, Satoshi Minabe, "Mixed Frobenius structure and local A-model", arXiv:1209.5550

まだできていない課題：

局所 B 模型の混合フロベニウス構造の構成と、それができたとして局所 A 模型との比較はまだできていない。2015 年になって、前者に関連しては望月拓郎氏(数理研)が内積を構成し[Mo], 後者については社本陽太氏(数理研)が混合フロベニウス構造の構成定理を示した[Sha]。今後、両氏の結果を踏まえて課題の解決を目指したい。

[Mo] Twister property of GKZ - hypergeometric systems, arXiv 1501.14046

[Sha] 混合フロベニウス構造と混合 trTLEP 構造 (修士論文)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 4 件)

Yukiko Konishi "Local quantum cohomology and Mixed Frobenius Structure", 研究集会 Bridgeland Stability and Birational Geometry (京都大学数理解析研究所 2014 年 6 月 16~19 日)にて

小西由紀子・三鍋聡司 "Local quantum cohomology and Mixed Frobenius Structure", 日本数学会 2015 年度年会 (明治大学駿河台キャンパスリパティタワー 2015 年 3 月 21~24 日)

小西由紀子・三鍋聡司 "混合フロベニウス構造と局所 A 模型", 日本数学会秋季総合分科会 (九州大学 2012 年 9 月 20 日)

小西由紀子・三鍋聡司 "局所 B 模型と混合ホッジ構造", 日本数学会秋季総合分科会 (名古屋大学 2010 年 9 月 22 日)

(における^oは講演者)

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等 なし

6 . 研究組織

(1)研究代表者

小西 由紀子 (KONISHI, Yuki ko)
京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：3 0 5 0 5 6 4 9

(2)研究分担者 なし

(3)連携研究者 なし